Szkolna Liga Zadaniowa

Seria I

1. Znaleźć wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania

$$(x + 1995)(x + 1997)(x + 1999)(x + 2001) + 16 = 0$$

2. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie w punkcie B. Styczna do jednego z nich punkcie A przecina drugi okrąg w punktach C oraz D. Udowodnić, że punkt A jest równoodległy od prostych BC i BD.

3. Udowodnić, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi:

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3\left(\sqrt[3]{abc} + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} - 1\right)}{1 + abc}$$

4. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Niech L i M będą środkami okręgów wpisanych w trójkąty BCA i BCD. Prostopadłe poprowadzone z L i M na – odpowiednio – proste AC i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że trójkąt LMR jest równoramienny.

5. Czy przestrzeń trójwymiarową da się podzielić na 2008 przystających części?

6. Liczba 9 jest sumą dwóch kolejnych liczb naturalnych: $9 = 4 + 5$. Jednocześnie może być przedstawiona jako suma (dwóch lub więcej) kolejnych liczb na dokładnie dwa sposoby: $9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$. Czy istnieje taka liczba naturalna, która da się zapisać jako suma 2230 kolejnych liczb, a jednocześnie można ją przedstawić jako sumę kolejnych liczb na dokładnie 2230 sposobów?