# Kółko 8 XI 2004 - kilka zadanek z wielomianów

**1.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że zarówno równanie $P(x) = 1$, jak i równanie $P(x) = 3$, ma co najmniej jedno rozwiązanie całkowite. Rozstrzygnij, czy równanie $P(x) = 2$ może mieć dwa różne rozwiązanie całkowite.

**2.** Dany jest wielomian całkowitoliczbowy $P(x)$, taki, że $3 \mid P(7)$ oraz $7 \mid P(3)$.
Wykaż, że $21 \mid P(10)$.

**3.** Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ mające dokładnie $n$ pierwiastków nie większych niż $-1$ oraz spełniające warunek

$$a_0{}^2 + a_1a_n = a_n{}^2 + a_0a_{n-1}.$$

**4.** Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ mają następującą własność: dla dowolnego wielomianu $W(x)$ stopnia 2 co najmniej trzy spośród liczb $W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_{1996})$ są równe. Udowodnić, że co najmniej trzy spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_{1996}$ są równe.

**5.** Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach całkowitych. Przypuśćmy, że liczby całkowite $k$ oraz $k + 1997$ są pierwiastkami $P(x)$ oraz $Q(1998) = 2000$. Wykaż, że równanie $Q(P(x)) = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

**6.** Wielomian $W(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla całkowitych $x$ wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $W(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

**7.** Rozstrzygnij, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych daje się przedstawić jako suma trzecich potęg wielomianów o współczynnikach wymiernych.

**8.** Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że jeżeli wielomian $P(x)$ w co najmniej sześciu różnych liczbach całkowitych przyjmuje wartość 12, to nie ma on pierwiastków całkowitych.

**9.** Wyznacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y$ równość

$$P(x^2 - y^2) = P(x + y)P(x - y).$$

**10.** Znajdź wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ równość

$$xP(x - 1) = (x - 2)P(x).$$