Kółko 7 IV 2005 - Wektory

1. Niech punkt S będzie przecięciem środkowych trójkąta ABC. Pokazać, że $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 0$.

2. Niech $A_1A_2 \ldots A_n$ będzie n-kątem foremnym, a punkt O będzie środkiem okręgu opisanego na nim. Wykaż, że $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = 0$ oraz $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_nA_1} = 0$.

3. $2n$-kąt foremny $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ jest wpisany w okrąg o promieniu r i środku 0. Jaka jest maksymalna długość wektora będącego sumą pewnych spośród wektorów $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \ldots, \overrightarrow{OA_{2n}}$?

4. Wewnątrz trójkąta ABC leży punkt P. Wykaż, że $\overrightarrow{PA} \cdot P(\triangle\ PBC) + \overrightarrow{PB} \cdot P(\triangle\ PAC) + \overrightarrow{PC} \cdot P(\triangle\ PAB) = 0$.

5. Na płaszczyźnie dane są 3 wektory $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ i $\overrightarrow{a_3}$ o długości 1. Wykaż, że można wybrać liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ze zbioru $\{-1, 1\}$ tak, że długość wektora $a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3$ jest nie mniejsza niż 2.

6. Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech punkty K, L, M, N będą odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DA. Wykaż, że środki boków KM i LN pokrywają się.

7. Gracze A i B grają w następującą grę. Gracz A podaje graczowi B ciąg wektorów $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$, wszystkie one leżą w jednej płaszczyźnie i mają długość 1. B znając te wektory podaje ciąg znaków, czyli ciąg liczb $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Następnie gracze rozpatrują ciąg wektorów $\overrightarrow{s_k} = \varepsilon_1\overrightarrow{a_1} + \varepsilon_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \varepsilon_k\overrightarrow{a_k}$. Wygrywa gracz A jeśli długość któregokolwiek z wektorów s_i jest większa niż 3, w przeciwnym razie wygrywa B. Wykaż, że B zawsze może wygrać.