Kółko 24 I 2004 - Permutacje

Teoria

1. Permutacja to zamiana elementów. Jeśli mamy zbiór X i ma on $n \in \mathbb{N}$ elementów, to $f : X \to X$, jeśli jest bijekcją, to jest to permutacja. Permutację zapisujemy np. tak: $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$, tzn., że i przechodzi na a_i.

2. Jest $n!$ permutacji zbioru mocy n (o n elementach).

3. Każdą permutację można rozłożyć na rozłączne cykle.

4. Transpozycja to zamiana dwóch elementów. Każda permutacja jest złożeniem transpozycji (niekoniecznie rozłącznych).

5. Inwersja w permutacji $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$, to para i, j taka, że $i < j$ i $a_i > a_j$.

6. Jeśli permutacja ma parzystą ilośc inwersji, to nazywamy ją parzystą, jeśli ma nieparzystą ilość inwersji, to nazywamy ją nieparzystą. Jeśli f to permutacja i $I(f)$ liczba inwersji, to $sgn(f) = (-1)^{I(f)}$.

7. Znak złożenia to iloczyn znaków ($sgn(f \circ g) = sgn(f) \cdot sgn(g)$).

8. Znak cyklu długości k, to $(-1)^{k-1}$.

9. Permutacja jest parzysta $\Leftrightarrow$ ma parzyście wiele cyklów parzystej długości.

Zadania

1. Dowody fakcików numer $4, 6, 7, 8, 9$.

2. Oblicz ile jest permutacji parzystych zbioru n elementowego.

3. Rozstrzygnij, czy z pierwszej tabliczki można przejść do drugiej tabliczki w popularnej grze przesuwania klocków. Możemy przesuwać dowolny sąsiadujący z pustym miejscem klocek na puste miejsce.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

4. Przy okrągłym stole siedzi n osób. Co minutę zmieniają oni miejsca, z tym, że zawsze w ten sam sposób (tzn. np. osoba z krzesła nr 1 zawsze idzie na krzesło nr 5 itd., żadne dwie oczywiście nie mogą przejść na to samo krzesło). Rozstrzygnij, czy na pewno po pewnym czasie wrócą oni do początkowego położenia, a jeśli tak, to ile maksymalnie czasu może im to zająć jeśli $n = 28$.

5. Dany jest zbiór liczb od 1 do $n + 1$. Mówimy, ze dwie uporządkowane n-tki są ze sobą *zaprzyjaznione*, gdy istnieją takie różne indeksy i oraz j, że na i-tym indeksie w pierwszej n-tce jest ta sama liczba, która jest na j-tym indeksie w drugiej n-tce. Wyznaczyc maksymalną moc zbioru n-tek, takiego, ze każde dwie są ze sobą *zaprzyjaźnione*.