Kółko 9 VI 2005 - Sumowanie

Proste przyklady

0a. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.

0b. Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}$.

0c. Wykaż, że dla $n \in N$ zachodzi: $\sum_{i=0}^{n} i(i-1)\binom{n}{i} = n(n-1)2^{n-2}$.

0d. Wykaż, że dla $n \in N$ zachodzi: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

0e. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

0f. Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n} 2^i\binom{n}{i}$.

Zadania

1. Wskazać wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych, taki, że

$$\sum_{i=1}^{n} W(i) = n^3,$$

lub udowodnić, że taki nie istnieje.

2. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} k \cdot k!$.

3. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$.

4. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{2^i}$.

5. Oblicz sumę $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}^2$.

6. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^{m} i(i+1)\ldots(i+m)$.

7. Wykaż, że dla $j, k, n \in N$ takich, że $n + k \geqslant j$ zachodzi: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{k}{j-i} = \binom{n+k}{j}$.

8. Oblicz sumę $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.