

Kółko 12 V 2005 - Stereometria rozwiązania (nawiazanie niektóre)

1. Świat ma kształt sfery. Fredk spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. 21 stycznia o godzinie 10.00 Fredk spojrział na świat po raz pierwszy, 21 lutego o godzinie 10.00 spojrział (być może z innego punktu) po raz drugi i podobnie 21 każdego miesiąca spogląda na świat o godzinie 10.00. Kiedy najwcześniej Fredk może uszczęśliwić cały świat?

Rozwiązanie Fredk może uszczęśliwić cały świat najwcześniej 21 kwietnia. Przykładem 4 punktów, z których ma patrzeć mogą być wierzchołki czworościanu opisanego na sferze świata. Należy jeszcze pokazać, że nie wystarczą 3 punkty. Przypuśćmy, że jednak istnieją takie punkty A , B i C . Poprowadźmy przez nie płaszczyznę π . Niech płaszczyzna λ będzie równoległa do płaszczyzny π i styczna do sfery świata w punkcie P . Wtedy punkt P nie zostanie na pewno uszczęśliwiony przez Fredka.

2. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami rozwartokątnymi.

Rozwiązanie Tak, istnieje taki czworościan. Skonstruujemy przykładowy. Niech $\triangle ABC$ będzie równoramienny ($|AB| = |AC|$) oraz $|\angle BAC| = 120^\circ$. Niech punkt D leży wewnątrz $\triangle ABC$ na dwusiecznej kąta BAC tak, że $|\angle BDC| = 150^\circ$. Teraz, jeżeli 'podniesiemy' trochę punkt D ponad płaszczyznę ABC , to powstanie szukany czworościan $ABCD$ o wszystkich ścianach rozwartokątnych.

3. Rozważmy cztery proste łączące odpowiednio wierzchołki ze środkami okręgów wpisanych w przeciwległe ściany czworościanu. Wykazać, że jeśli dwie spośród tych prostych przecinają się, to i dwie pozostałe się przecinają.

4. Dany jest czworościan foremny $ABCD$ o krawędzi 1. Niech K i L będą odpowiednio środkami krawędzi AB i CD . Obliczyć odległość pomiędzy prostymi DK i AL .

5. Rozstrzygnąć, czy istnieje czworościan, który nie jest foremny i który ma trzy osie symetrii.

Rozwiązanie Tak istnieje. Rozpatrzmy prostopadłościan $ABCD A'B'C'D'$. Wpisany w niego czworościan $ACB'D'$ ma 3 osie symetrii (proste łączące środki przeciwległych ścian) i nie jest foremny o ile prostopadłościan nie jest sześcianem.

6. Rozstrzygnąć, czy istnieje 10 płaszczyzn, z których każda rozcina dany czworościan foremny na dwie bryły przystające.

Rozwiązanie Tak, istnieje nieskończenie wiele takich płaszczyzn. Każda płaszczyzna zawierająca prostą będącą osią symetrii bryły dzieli tę bryłę na dwie przystające części. Czworościan foremny ma 3 osie symetrii, więc dowolna z płaszczyzn zawierających którąś z tych prostych jest jedną z szukanych płaszczyzn.