Kółko - 17 III 2004

1. Niech $P(x)$ i $Q(x)$ będą wielomianami stopnia 2 o współczynnikach rzeczywistych. Jeżeli dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ wielomian $Q(x)$ przyjmuje wartość całkowitą, to wielomian $P(x)$ dla tego x też przyjmuje wartość całkowitą. Udowodnij, że istnieją liczby $n, m \in \mathbb{Z}$ takie, że $P(x) = nQ(x) + m$.

2. Znajdź największe $n \in \mathbb{N}$, takie, że istnieje ciąg liczb naturalnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nie wszystkich równych zero, taki, że dla dowolnego ciągu $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ o wyrazach ze zbioru $\{-1, 0, 1\}$ nie wszystkich równych zero zachodzi $n^3 \nmid \epsilon_1 x_1 + \epsilon_2 x_2 + \ldots + \epsilon_n x_n$.

3. Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$. Wykaż, że zachodzi:

$$2^n n! \leqslant \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leqslant (m^2+m)^n.$$

4. Sejm musi wybrać pomiędzy trzema planami reform: A, B i C. Każdy poseł szereguje je (w myślach) względem własnych upodobań, np. $A > C > B$. Przeprowadzone zostało głosowanie, która opcja jest lepsza, A, czy B, które zostało rozstrzygnięte na korzyść A. Później zostało przeprowadzone głosowanie pomiędzy B i C, w którym zwyciężyła opcja B. Rozstrzygnij, czy posłowie na pewno zdecydują, że plan A jest lepszy niż plan C zakładając, że nie zmieniają zdania w trakcie jednego posiedzenienia. Przyjmij, że posłów może być dowolna liczba, byle ci sami byli obecni przy wszystkich głosowaniach.

5. Rozwiąż układ równań w liczbach $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^3 = 2y - 1 \\ y^3 = 2z - 1 \\ z^3 = 2x - 1. \end{cases}$$

6. Danych jest 111 wektorów jednostkowych na płaszczyźnie, których suma jest wektorem zerowym. Wykaż, że można wybrać spośród nich 55 tak, że długość ich sumy jest nie większa niż 1.