

## Kółko 20 XII 2004 - kilka zadań z kombinatoryki

1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Wykazać, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

2. Niech  $n$  i  $k$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Danych jest  $nk$  przedmiotów (tych samych rozmiarów) i  $k$  pudełek, z których każde pomieści  $n$  przedmiotów. Każdy przedmiot jest pokolorowany jednym z  $k$  różnych kolorów. Wykazać, że można rozmieścić te przedmioty w pudełkach w taki sposób, że w każdym pudełku znajdują się przedmioty w co najwyżej dwóch kolorach.

3. Na nieskończonej szachownicy dwaj gracze na przemian wpisują na wolne jeszcze pola po jednym znaku. Jeden gracz używa znaku  $\times$ , a drugi znaku  $\circ$ . Na początku gry szachownica jest pusta. Wygrywa ten, kto pierwszy zapełni swoimi znakami jakiś kwadrat o wymiarach  $2 \times 2$ . Czy gracz rozpoczynający rozgrywkę może zapewnić sobie zwycięstwo?

4. Mamy do dyspozycji 1999 monet, z których każde dwie mają różny ciężar. Dysponujemy urządzeniem, które pozwala spośród dowolnych trzech monet wskazać tę, której ciężar zawiera się pomiędzy ciężarami dwóch pozostałych. Dowiedzieć, że moneta tysięczna pod względem ciężaru może być wyznaczona przez nasze urządzenie stosowane nie więcej niż 1000000 razy. Udowodnić, że za pomocą tego urządzenia miejsce w ciągu ciężarów można wyznaczyć tylko dla tej monety.

5. Liczby  $1, 2, \dots, 49$  rozmieszczono w tablicy  $7 \times 7$ , po czym obliczono sumę liczb w każdym wierszu i każdej kolumnie. Niektóre z tych 14 sum są nieparzyste, a pozostałe są parzyste. Niech  $A$  oznacza sumę wszystkich nieparzystych sum, a  $B$  sumę wszystkich parzystych sum. Czy jest możliwe takie rozmieszczenie liczb, że  $A = B$ ?

6. Czy można wybrać na płaszczyźnie  $n < 1000$  punktów w ten sposób, by istniało co najmniej  $6 \times n$  różnych par punktów, pomiędzy którymi jest taka sama odległość? oł. (Wszystko będzie narysowane na tablicy)