Kółko 7 II 2005 - Kanadyjska i Szwedzka Olimpiada

1. Znajdź wszystkie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych spełniające zależność: $P(x)+1=\frac{P(x-1)+P(x+1)}{2}$.

2. Mówimy, że $n \in \mathbb{N}$ spełnia zależność X jeżeli każda liczba mniejsza od n daje się przedstawić w postaci sumy różnych dzielników n. Wykazać, że jeżeli n i m spełniają zależność X, to również mn spełnia tę zależność.

3. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi $AB = BC$, $\measuredangle CBD = 2\measuredangle ADB$ oraz $\measuredangle ABD = 2\measuredangle CDB$. Wykazać, że $AD = DC$.

4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = m^2$ w liczbach naturalnych n, m.

5. Wykazać, że w ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_{2000}$ takim, że dla każdego i $x_i \in \mathbb{Z}$, $|x_i| \leqslant 1000$ oraz $x_1 + x_2 + \ldots + x_{1999} + x_{2000} = 1$ możemy znaleźć podciąg o sumie 0.

6. Wykaż, że $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geqslant x + y + z$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

7. Niech S będzie zbiorem n różnych punktów na płaszczyźnie. Najkrótsza odległość między dwoma punktami ze zbioru S wynosi d. Wykazać, że istnieje podzbiór T zbioru S zawierający przynajmniej $\frac{n}{7}$ punktów, taki, że najkrótsza odległość pomiędzy dwoma punktami ze zbioru T wynosi co najmniej $d\sqrt{3}$.