**Kółko 17 I 2004 - Irlandzka Olimpiada**

**1.** Kwadrat magiczny $3 \times 3$ jest wypełniony liczbami całkowitymi dodatnimi oraz suma liczb w każdej kolumnie, w każdym wierszu i na każdej z dwóch głównych przekątnych wynosi $m \in \mathbb{Z}^+$. Wykaż, że $m$ musi być podzielne przez 3 oraz, że największa liczba występująca w kwadracie jest nie większa niż $\frac{2m}{3} - 1$.

**2.** Każdy wyraz ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ należy do zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ oraz $a_1+a_2+\ldots+a_n < 2n$. Wykaż, że możemy znaleźć podciąg o sumie równej $n$.

**3.** Ciąg $(a_n)$ jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1, a_{2n} = a_n, a_{2n+1} = a_{2n} + 1$. Znajdź największą wartość wśród $a_1, a_2, \ldots, a_{1989}$ oraz policz ile razy ona występuje.

**4.** Wykaż, że jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $a_n \in \{-1, 1\}$ oraz $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ to $4 \mid n$.

**5.** Liczby $p_1 < p_2 < \ldots < p_{15}$ są liczbami pierwszymi tworzącymi ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnica jest wielokrotnością $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

**6.** Rozstrzygnać, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, że dla każdego $n > 1$ zachodzi $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$.

**7.** Prostokąt $a \times b, a, b \in \mathbb{Z}^+$ podzielono na $a \cdot b$ małych kwadracików. Wykaż, że przekątna prostokąta przecina $a + b - NWD(a, b)$ kwadracików. Oblicz ile sześcianików przecina głowna przekątna w prostopadłościanie $a \times b \times c$.

**8.** Znajdź liczbę szachownic $n \times n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ustalone) wypełnionych tylko zerami i jedynkami, takich, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu suma liczb jest nieparzysta.