

## Zadania trudniejsze

Termin: 10.12.2009

**1.** Rozważmy tablicę liczb całkowitych nieujemnych, rozmiaru  $n \times n$  o następującej własności: Jeśli liczba znajdująca się w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie jest równa 0, to suma wszystkich liczb z  $i$ -tego wiersza i  $j$ -tej kolumny (każdą liczbę liczymy tylko raz) jest większa równa  $n$ . Udowodnij, że suma wszystkich liczb w tablicy jest większa równa  $\frac{1}{2}n^2$ .

**2.** Liczby naturalne od 1 do 99 (niekoniecznie różne) zostały wypisane na 99 kartach. Wiemy, że suma liczb w dowolnym podzbiornie kart (łącznie z całym ich zbiorem, wyłączając zbiór pusty) nie jest podzielna przez 100. Pokazać, że na wszystkich kartach jest ta sama liczba.

**3.** Mamy daną liczbę naturalną  $n \geq 2$ . Znajdź sposób by przydzielić liczby naturalne do wierzchołków  $2^n$  kąta foremnego, tak by spełnione były podane warunki:

- (i) liczby składają się jedynie z cyfr 0 i 1;
- (ii) każda liczba ma dokładnie  $n$  cyfr;
- (iii) liczby są parami różne;
- (iv) liczby na dwóch sąsiadujących wierzchołkach różnią się dokładnie jedną cyfrą.