Kółko 19 V 2005 - Stereometria (teoria)

Wzór Eulera

Niech w, k, s oznaczają odpowiednio liczby: wierzchołków, krawędzi i ścian wielościanu wypukłego. Wtedy zachodzi równość:

$$w - k + s = 2.$$

Szkic dowodu

Dowód idzie przez spłaszczenie sytuacji, tak, że na płaszczyźnie wystarczy dowieść $w-k+s = 2$. Następnie triangulujemy powstały graf (przy dodaniu 1 krawędzi zwiększa się o 1 l. krawędzi i o 1 l. ścian). Następnie usuwamy po kolei krawędzie, są 2 przypadki:

- po usunięciu 1 krawędzi znika trójkąt, wtedy sciany i krawędzie zmniejszają swoją liczbę o 1, więc ok.
- po usunięciu 2 krawędzi znika trójkąt, wtedy giną 2 krawędzie, 1 ściana i 1 wierzchołek, więc ok.

Dochodzimy do pojedynczego trójkąta, który zachowuje równość $(3 - 3 + 1 = 1)$.

Fakt

Przy takich samych oznaczeniach zachodzą nierówności: $3s \leqslant 2k$ oraz $3w \leqslant 2k$.

Dowód

Wykażę nierówność $3s \leqslant 2k$, drugą nierówność można dowodzić analogicznie, lub skorzystać z następnego faktu.
Zliczamy krawędzie po ścianach. Każda ściana ma tych krawędzi co najmniej 3, więc po zsumowaniu wyszlo nam t krawędzi, gdzie $t \geqslant 3s$. Jednak każda krawędź jest przy dwóch ścianach, więc tak naprawde policzyliśmy $2 \cdot k$, a więc $2 \cdot k = t \geqslant 3s$.

Fakt

Bryły A i B nazywamy dualnymi, gdy A powstaje z B poprzez połączenie środków sąsiednich ścian B krawędziami. Wtedy środki ścian B stają się wierzchołkami A, a wierzchołki B odpowiadają ścianom A. Oczywiście wtedy również liczba krawędzi w A i w B jest taka sama (choćby ze wzoru Eulera). A zatem dowolną zależność między s, k i w można przepisać na podobną tylko z zamienionymi k i w.

Fakt

Istnieje dokądnie 5 wielościanów foremnych: czworościan $(3, 3)$, sześcian$(4, 3)$, ośmiościan$(3, 4)$, dwunastościan$(5, 3)$ i dwudziestościan$(3, 5)$. Liczby podane po bryłach to odpowiednio: ilość boków na ścianie i ilość ścian w jednym wierzchołku. Wielościany (a, b) i (b, a) są wzajemnie dualne.
Teraz - dlaczego tylko tyle. Po pierwsze każdy wielościan foremny ma wszystkie ściany będące takimi samymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku spotyka się taka sama ilość wielokątów. A zatem każdy wielościan można przedstawić w formie (a, b). Zauważmy poza tym, że suma kątów w jednym wierzchołku musi być mniejsza ostro niż 180 stopni, oraz muszą sie tam spotykać co najmniej 3 ściany. A zatem ściany mogą być co najwyżej 5-ciokątami. 5-ciokątów może być w jednym wierzchołku maksymalnie $\lceil \frac{360}{108} \rceil - 1 = 3$, analogicznie czworokątów może być maksymalnie $\lceil \frac{360}{90} \rceil - 1 = 3$ i trójkątów $\lceil \frac{360}{60} \rceil - 1 = 5$. A więc wielokątów foremnych jest dokładnie 5.