Szkolna Liga Zadaniowa

Seria I – Rozwiazania

Zadanie 1 (Holandia 1998) Podstawmy $y = x + 1998$. Wtedy równanie przyjmuje postać: $(y-3)(y-1)(y+1)(y+3)+16=0$. Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia można zapisać je jako $(y^2-1)(y^2-9)+16=0$. Zatem $y^4-10y^2+25=0$. Łatwo policzyć, że $\Delta_{y^2}=0$, zatem $y^2=5$. Czyli $x=y-1998=\pm\sqrt{5}-1998$.

Zadanie 2 (Litwa 2006) Niech G będzie punktem przecięcia prostej AD i stycznej do obu okręgów przechodzącej przez B. Ponadto niech punkty E i F będą rzutami punktu A odpowiednio na proste BD i BC. Wtedy:

$$\angle ABF = \angle ABG + \angle CBG = \angle BAD + \angle BDA = \pi - \angle ABD = \angle ABE$$

Zatem punkt A leży na dwusiecznej $\angle EBF$.

Zadanie 3 (*Old and New Inequalities*) Następujące przekształcenia są równoważne:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}-1\right)}{1+abc}$$

$$\frac{1+abc}{a(b+1)}+\frac{1+abc}{b(c+1)}+\frac{1+abc}{c(a+1)} \geqslant 3\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}-1\right)$$

$$\frac{1+abc+ab+a}{a(b+1)}+\frac{1+abc+bc+b}{b(c+1)}+\frac{1+abc+ac+c}{c(a+1)} \geqslant 3\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\frac{a+1+ab(c+1)}{a(b+1)}+\frac{b+1+bc(a+1)}{b(c+1)}+\frac{c+1+ac(b+1)}{c(a+1)} \geqslant 3\left(\sqrt[3]{abc}+\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Na mocy nierówności między średnimi zachodzi

$$\frac{a+1}{a(b+1)}+\frac{b+1}{b(c+1)}+\frac{c+1}{c(a+1)} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\frac{ab(c+1)}{a(b+1)}+\frac{bc(a+1)}{b(c+1)}+\frac{ac(b+1)}{c(a+1)} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

Sumując dwie powyższe nierówności otrzymujemy nierówność równoważną tezie.

Zadanie 4 (Czechy 2007) Użyteczny będzie następujący

> **Lemat.** Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt XYZ, a P środkiem łuku XY niezawierającego Z okręgu opisanego na XYZ. Wówczas $PX = PI = PY$.

Proste AL i DM przecinają okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ w punkcie N będącym środkiem łuku BC. Wówczas na mocy lematu $NL = NB = NM$. Ponieważ trójkąt NLM jest równoramienny, $\angle NLM = \angle NML$. Z równości kątów $\angle ALR$ oraz $\angle DMR$ otrzymujemy

$$\angle RLM = \pi - \angle NLM - \angle ALR = \pi - \angle NML - \angle DMR = \angle RML$$

Trójkąt RLM jest więc równoramienny.

Zadanie 5 (*Delta*, XI 1993) Tak, na przykład w sposób następujący: zbiory $A_1, A_2 \ldots A_{2008}$ określamy tak, że punkt o współrzędnych (x, y, z) w ustalonym kartezjańskim układzie współrzędnych należy do A_i wtedy i tylko wtedy, gdy $[x] \equiv i \pmod{2008}$. Dowolne dwa zbiory A_i i A_j są rozłączne i istnieje translacja przekształcająca jeden na drugi.

Zadanie 6 (IMO Shortlist 1990) Niech N będzie liczbą spełniającą warunki zadania. Wówczas dla pewnego m

$$N = m + (m + 1) + \ldots + (m + 2229) = 1115(2m + 2229)$$

Zatem N jest nieparzyste i podzielne przez $1115 = 5 \cdot 223$. Przypuśćmy, że dla pewnych n, k zachodzi

$$N = n + (n + 1) + \ldots + (n + k) = \frac{(k + 1)(2n + k)}{2}$$

Ponieważ N jest nieparzyste, jeden z czynników jest nieparzysty, a drugi dzieli się przez 2, lecz nie przez 4. Zauważmy, że $k + 1 < 2n + k$. Jednocześnie każdy rozkład $2N = ab$, gdzie $1 < a < b$ odpowiada pewnej parze (n, k), gdzie n i k są wyznaczone jednoznacznie. Ponieważ $a = b$ jest niemożliwe, liczba takich rozkładów wynosi $d(2N)/2 - 1$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby x. Istnieje dokładnie 2230 różnych par (n, k), musi więc zachodzić $d(2N) = 2 \cdot 2231$. Niech

$$2N = 2 \cdot 5^{\alpha_1} \cdot 223^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

gdzie $p_3, \ldots, p_r$ są różnymi liczbami pierwszymi. Wówczas

$$d(2N) = 2 \cdot (1 + \alpha_1) \cdots (1 + \alpha_r) = 2 \cdot 2231$$

Jednak $2231 = 23 \cdot 97$, czyli musi zachodzić $\{\alpha_1, \alpha_2\} = \{22, 96\}$ oraz $\alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \alpha_r = 0$. Ponieważ wcześniejsze rozumowanie zawierało ciąg równoważności, wynika stąd, że liczby $N = 5^{22} \cdot 223^{96}$ oraz $N = 5^{96} \cdot 223^{22}$ spełniają warunki zadania.