Kółko 17 I 2004 - Irlandzka Olimpiada

1. Kwadrat magiczny 3×3 jest wypełniony liczbami całkowitymi dodatnimi oraz suma liczb w każdej kolumnie, w każdym wierszu i na każdej z dwóch głównych przekątnych wynosi $m \in \mathbb{Z}^+$. Wykaż, że m musi być podzielne przez 3 oraz, że największa liczba występująca w kwadracie jest nie większa niż $\frac{2m}{3} - 1$.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy środkową liczbę przez x, zauważmy, że suma lewej kolumny i prawej kolumny oraz $3x$ jest równa sumie dwóch głównych przekątnych oraz środkowego rzędu. Zatem $2m + 3x = 3m \Rightarrow x = \frac{m}{3}$, z czego wynika również, że pozostałe elementy muszą być mniejsze niż $m - \frac{m}{3} = \frac{2m}{3}$.

2. Każdy wyraz ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ należy do zbioru $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ oraz $a_1+a_2+\ldots+a_n < 2n$. Wykaż, że możemy znaleźć podciąg o sumie równej n.

Szkic rozwiązania

Rozpatrzmy liczby $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Jest ich n i są w przedziale od 1 do $2n-1$. Jeśli każda reszta modulo n jest przyjmowana, to jest też przyjmowana reszta 0, a jedyna taka liczba w tym przedziale to n. Jeśli nie jest przyjmowana każda reszta, to pewna reszta (z Dirichleta) jest przyjmowana minimum 2 razy, wiec różnica tych dwóch liczb daje resztę 0, czyli liczbę n.

3. Ciąg (a_n) jest zdefiniowany następująco: $a_1 = 1, a_{2n} = a_n, a_{2n+1} = a_{2n} + 1$. Znajdź największą wartość wśród $a_1, a_2, \ldots, a_{1989}$ oraz policz ile razy ona występuje.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $a_k =$ ilość jedynek w rozwinięciu k w systemie binarnym (można pokazać przez indukcję). Wystarczy zauważyć tylko, że maksymalna liczba jedynek w rozwinięciu dwójkowym liczb do 1989 wynosi 10 i występuje 5 razy (liczby 1111111111, 10111111111, 11011111111, 11101111111, 11110111111 - binarnie).

4. Wykaż, że jeśli dla pewnego $n \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $a_n \in \{-1, 1\}$ oraz $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ to $4 \mid n$.

Szkic rozwiązania

Umieścmy liczby na okręgu. Zauważmy, że zmiana jednej liczby dodaje 4 (gdy po bokach są te same liczby, a ta w środku jest inna), odejmuje 4 (gdy wszystkie trzy są te same) lub nie zmienia sumy iloczynów sąsiednich liczb (sąsiedzi są różnych znaków). No a oczywiście dla samych jedynek jedynie dla n t., że $4 \mid n$ suma iloczynów jest podzielna przez 4.

5. Liczby $p_1 < p_2 < \ldots < p_{15}$ są liczbami pierwszymi tworzącymi ciąg arytmetyczny. Wykaż, że różnica jest wielokrotnością $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Szkic rozwiązania

Oczywiście jeśli różnica nie jest podzielna przez jakieś k z tego zbioru $(2, 3, 5, 7, 11, 13)$, to istnieje wśród ciągu (p_n) liczba podzielna przez k. Jeśli nie jest to $2, 3, 5, 7$, to istnieje druga taka (w lewo, lub w prawo). Jeśli jest to 11 lub 13, to może tak nie być (liczba gdzieś w środku), jednak aby nie wystąpiła druga taka, liczbą tą nie może być p_1 (p_{1+11} i p_{1+13} należą do tego ciągu). Jednak różnica ciągu jest na pewno podzielna przez $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, więc druga liczba na pewno jest większa niż 13.

6. Rozstrzygnać, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$, że dla każdego $n > 1$ zachodzi $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))$.

Szkic rozwiązania

Nie istnieje. Zauważmy, że minimum f musi być przyjmowane dla 1, bo dla $n > 1$ wartość funkcji jest sumą dwóch wartości tej funkcji, a więc jest większe niż minimalna wartość funkcji. Niech $f(1) = m$. Niech k takie, że $f(k)$ mimimum po wartościach funkcji oprócz wartości w 1. Wtedy $k > 1$, więc $f(k) = f(f(k-1)) + f(f(k+1))$, czyli $f(k)$ jest sumą dwóch wartości funkcji f. Gdyby choć jedna z tych wartości była różna od m, to wtedy prawa strona byłaby większa od lewej, czyli musi być $f(f(k-1)) = m$ i $f(f(k+1)) = m$. Zatem $f(k+1) = 1$, bo tylko dla jedynki przyjmowane jest m. Zatem $k + 1 = 1$, sprzecznośc.

7. Prostokąt $a \times b, a, b \in \mathbb{Z}^+$ podzielono na $a \cdot b$ małych kwadracików. Wykaż, że przekątna prostokąta przecina $a + b - NWD(a, b)$ kwadracików. Oblicz ile sześcianików przecina głowna przekątna w prostopadłościanie $a \times b \times c$.

Szkic rozwiązania

Przekątna przecina $a - 1$ linii pionowych i $b - 1$ poziomych, więc jeśli nie przechodzi przez żaden punkt kratowy, to przecina $a-1+b-1+1 = a+b-1$ kwadracików. Przekątna przechodzi przez $NWD(a, b)-1$ punktów kratowych, więc tracimy tyle kwadracików (po jednym na każdym pkcie kratowym). Zatem wychodzi $a + b + 1 - (NWD(a, b) - 1) = a + b - NWD(a, b)$. Dla prostopadłościanu mamy z zasady włączeń i wyłączeń $a + b + c - NWD(a, b) - NWD(a, c) - NWD(b, c) + NWD(a, b, c)$.

8. Znajdź liczbę szachownic $n \times n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$ ustalone) wypełnionych tylko zerami i jedynkami, takich, że w każdej kolumnie i w każdym wierszu suma liczb jest nieparzysta.

Szkic rozwiązania

Każdą szachownicę $(n - 1) \times (n - 1)$ można dopełnić do szukanej, więc wychodzi $2^{(n-1)^2}$.