

Liczby naturalne i pewien ładny trik;)

20.05.2009

1. Udowodnić, że równanie

$$a^2 + b^2 = c^2 + 1$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w parami różnych liczbach naturalnych a, b, c .

2. Pokazać, że liczby naturalne m i n są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $2^m - 1$ i $2^n - 1$ są względnie pierwsze.

3. Dana jest liczba naturalna n niepodzielna przez 5 i nieparzysta. Wykaż, że spośród liczb Grabowskiego (składających się w zapisie dziesiętnym wyłącznie z jedynek) nieskończenie wiele dzieli się przez n .

4. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 4xy(2x^2 - 1) = 1 \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

5. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste x, y, p, q spełniają układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = 1 \\ xp + yq = 0, \end{cases}$$

to spełniają one także układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + p^2 = y^2 + q^2 = 1 \\ xy + pq = 0. \end{cases}$$

6. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases}$$