Kilka zadań troszeczkę trudniejszych od pozostałych

1. Pokazać, że dla liczb całkowitych dodatnich a, n zachodzi podzielność:

$$n|\sum_{i=0}^{n-1} a^{(i,n)}$$

gdzie (k,l) oznacza największy wspólny dzielnik liczb k i l.

2. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla $k = 1, 2, \ldots, n$ oznaczmy $a_k = \frac{1}{\binom{n}{k}}$ oraz $b_k = 2^{k-n}$. Pokazać, że:

$$\frac{a_1 - b_1}{1} + \frac{a_2 - b_2}{2} + \ldots + \frac{a_n - b_n}{n} = 0$$

3. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi:

$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$$

4. Dana jest kwadratową szachownica o boku długości 19. Ściśle wewnątrz szachownicy wyszczególniamy kwadratową szachownicę o boku długości 17. Rozstrzygnąć, czy mniejszą szachownicę da się pokryć rozłącznymi prostokątami poziomymi 5×1 i pionowymi 1×4, umieszczonymi na większej szachownicy.

5. Znaleźć wszystkie liczby całkowite x, y, z, t spełniające układ równań:

$$\begin{cases} xz - 2yt = 3 \\ xt + yz = 1 \end{cases}$$

6. Udowodnić, że istnieje taka liczba całkowita k, że $k \cdot 2^n + 1$ jest złożone dla każdego $n \geqslant 1$.

7. Niech $P(x), Q(x), R(x), S(x)$ będą takimi wielomianami, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi:

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

Pokazać, że $P(1) = 0$.

8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Niech D, E, F będą rzutami prostokątnymi punktu P na proste BC, CA, AB. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF, zaś r jego promieniem. Dowieść, że:

$$pole(ABC) \geqslant 3r\sqrt{3r^2 - 3|OP|^2}$$

9. Dany jest okrąg o i dwa trójkąty weń wpisane. Wycinają one z płaszczyzny sześciokąt. Pokazać, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

10. Środkowa AM trójkąta ABC, w którym $AB \neq AC$ przecina okrąg wpisany ω w K i L. Proste równoległe do BC przechodzące odpowiednio przez K i L przecinają ω ponownie w X i Y. Proste AX i AY przecinają bok BC w punktach P i Q. Udowodnij, że $BP = CQ$.

11. Na płaszczyźnie dane jest koło o promieniu 1. Nakryto je kwadratem o boku 2. Następnie podzielono ten kwadrat na 2007 równoległych pasków i wyrzucono jeden z nich. Pokazać, że pozostałymi paskami nie da się pokryć koła.