

Teoria liczb - zadania

0. Pokazać, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.
1. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n dla których liczby $n^n + 1$ i $(2n)^{2n} + 1$ są pierwsze.
2. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich (x, y, n) spełniające równanie:

$$(x - y)^n = xy$$

3. Pokazać, że dla liczby pierwszej p i naturalnej n zachodzi $p \mid \binom{np}{p} - n$.
4. Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p dla których istnieje taka liczba naturalna k , że $p \mid 2^k + 3^k + 6^k - 1$.
5. Pokazać, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje co najwyżej jedna liczba pierwsza q , że $p \mid 2^q - 1$.
6. Liczby p, q są pierwsze. Pokazać, że jeżeli $q \mid \frac{2^p - 1}{p - 1}$ to $p \mid q - 1$.
7. Znaleźć wszystkie liczby całkowite nieujemne (x, y) spełniające równanie:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$