Izometrie - wykład dla najmłodszych

Definicja *Izometrią afiniczną płaszczyzny* nazywamy każde przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zachowujące odległości, tzn. dla każdej pary punktów $X, Y \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $|XY| = |f(X)f(Y)|$.

Przykłady: identyczność, symetria osiowa, obrót

Twierdzenie o klasyfikacji izometrii płaszczyzny

Każda izometria płaszczyzny jest identycznością, symetrią osiową, obrotem, przesunięciem lub symetrią z poślizgiem.

Kroki dowodowe

1. Izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez trzy pary argument - wartość dla niewspółliniowych argumentów.
2. Każda izometria jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych
3. Lemat o przesuwaniu prostych równoległych.
4. Lemat o kręceniu krzyżem.
5. Klasyfikacja izometrii:
   (a) Izometrie o liczbie symetrii 0 to identyczność
   (b) Izometrie o liczbie symetrii 1 to symetrie osiowe
   (c) Izometrie o liczbie symetrii 2 to obroty i przesunięcia
   (d) Izometrie o liczbie symetrii 3 to symetrie z poślizgiem

Fakt o złożeniu obrotów

Złożeniem obrotu względem punktu A o kąt α i obrotu względem B o kąt β jest obrót o kąt $\alpha + \beta$ względem takiego punktu C, że $\measuredangle CAB = \frac{\alpha}{2}$ oraz $\measuredangle ABC = \frac{\beta}{2}$.

Zadania

1. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC znaleziono taki punkt P, że $AP = 3$, $BP = 4$, $CP = 5$. Oblicz pole trójkąta.

2. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą rowności:

$$AB = BC, CD = DE, EF = FA, \angle ABC + \angle CDE + \angle EFA = 360^\circ$$

Pokazać, że trójkąt BDF jest równoboczny wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA = 120^\circ$.

3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz

$$\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$$

. Dowieść, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

4. Na zewnątrz boków AB i BC trójkąta ABC zbudowano trójkąty prostokątne równoramienne PAB i QBC tak, że kąty przy wierzchołkach P i Q są proste. Pokazać, że jeśli M to środek boku AC, to $MP = MQ$ oraz $\angle PMQ = 90^\circ$.

5. Na zewnątrz boków czworokąta $ABCD$ zbudowano cztery kwadraty o środkach kolejno w K, L, M, N. Pokazać, że odcinki KM i LN mają równą długość i są prostopadłe.

6. Na zewnątrz trójkąta ABC dobudowano takie trójkąty ABR,BCP,CAQ, że $\angle PBC = 45^\circ$,$\angle PCB = 30^\circ$,$\angle QAC = 45^\circ$,$\angle QCA = 30^\circ$,$\angle RAB = 15^\circ$,$\angle RBA = 15^\circ$. Pokazać, że $\angle QRP = 90^\circ$ i $QR = RP$.

7. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ w którym $AB = CD$. Na jego zewnątrz dobudowano trójkąty AMB i CND przy czym $AM = DN$ i $BM = CN$. Pokazać, że środki odcinków AD,BC i MN leżą na jednej prostej.