Zawody drużynowe

grupa młodsza

środa, 26 września 2007

31. Punkty C i D leżą na półokręgu o średnicy AB, przy czym punkt C leży bliżej A niż punkt D. Niech M,N,P będą środkami odpowiednio odcinków AC, BD i CD. Punkt O_A jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACP, a punkt O_B jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BDP. Pokazać, że $O_AO_B \| MN$.

32. Pokazać, że dla każdego $n \geqslant 2$ zachodzi:

$$n(\sqrt{n+1}-1) \leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} \leqslant 1+n(1-\frac{1}{\sqrt[n]{n}})$$

33. Dane są dwa okręgi o_1 i o_2 przecinające się w punktach X i Y. Prosta l jest styczna do o_1 i o_2 w punktach odpowiednio A i B. Niech m bedzie prostą styczną w punkcie X do okręgu opisanego na XAB , a n prostą styczną w punkcie Y do okręgu opisanego na YAB. Udowodnij, że proste l, m i n przecinają się w jednym punkcie.

34. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$3(a+b+c) \geqslant 8\sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

35. Pokazać, że dla liczby pierwszej nieparzystej p i liczby całkowitej $k \geqslant p$ zachodzi:

$$\binom{k}{p} \equiv \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \mod p$$

36. Dodatnie liczby niewymierne p, q spełniają warunek $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $n = \lfloor pk \rfloor$ lub $n = \lfloor qk \rfloor$.

37. W pewnym turnieju wzięła udział pewna liczba szkół. Każda z nich wystawiła reprezentację złożoną z pewnej liczby chłopców i pewnej liczby dziewczynek, przy czym całkowita liczba dziewczynek biorących udział w turnieju różniła się od liczby chłopców o 1. Następnie rozegrano mecze pomiędzy każdymi dwoma uczestnikami pochodzącymi z różnych szkół. Okazało się, że liczby meczów pomiędzy uczestnikami różnej płci oraz tej samej płci różniły się o 1. Wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę szkół, które wystawiły nieparzystą liczbę reprezentantów.

Zawody drużynowe

grupa starsza

środa, 26 września 2007

34. Pokazać, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$3(a+b+c) \geqslant 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

35. Pokazać, że dla liczby pierwszej nieparzystej p i liczby całkowitej $k \geqslant p$ zachodzi:

$$\binom{k}{p} \equiv \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor \mod p$$

36. Dodatnie liczby niewymierne p, q spełniają warunek $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Udowodnić, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $k \in \mathbb{N}$, że $n = \lfloor pk \rfloor$ lub $n = \lfloor qk \rfloor$.

37. W pewnym turnieju wzięła udział pewna liczba szkół. Każda z nich wystawiła reprezentację złożoną z pewnej liczby chłopców i pewnej liczby dziewczynek, przy czym całkowita liczba dziewczynek biorących udział w turnieju różniła się od liczby chłopców o 1. Następnie rozegrano mecze pomiędzy każdymi dwoma uczestnikami pochodzącymi z różnych szkół. Okazało się, że liczby meczów pomiędzy uczestnikami różnej płci oraz tej samej płci różniły się o 1. Wyznaczyć maksymalną możliwą liczbę szkół, które wystawiły nieparzystą liczbę reprezentantów.

38. Dane są dwa okręgi o_1, o_2 przecinające się w punktach A i B. Niech l będzie prostą styczną do o_1 i o_2 w punktach odpowiednio X i Y. Styczne w punktach X i Y do okręgu opisanego na AXY przecinają się w punkcie C. Niech B' będzie odbiciem punktu B względem prostej l. Dokazać, że punkty B',A i C są współliniowe.

39. Na płaszczyźnie dane jest 9 punktów, z których żadne 3 nie są współliniowe. Pokazać, że dla każdego z tych punktów liczba trójkątów o wierzchołkach w 3 z pozostałych 8 punktów, do których wnętrza on należy, jest parzysta.

310. Niech $ABCD$ będzie równoległobokiem. Prosta l, przechodząca przez punkt A przecina półproste BC i DC odpowiednio w punktach X i Y. Niech K i L będą środkami okręgów dopisanych trójkątów ABX i ADY stycznych odpowiednio do boków BX i DY tych trójkątów. Pokazać, że dla ustalonego równoległoboku $ABCD$ miara kąta KCL nie zależy od wyboru prostej l.

311. Znaleźć zbiór wartości liczb $x_0, x_1 \in R$ dla których ciąg $(x_n)_{n \in N}$ zdefiniowany poprzez

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n}{3x_{n-1} - 2x_n}, \qquad n \geqslant 1$$

zawiera nieskończenie liczb naturalnych.