Analiza - zadania

0. Pokazać, że dla każdego wielomianu $P(x)$ istnieje takie M, że dla $x > M$ zachodzi $e^x > P(x)$.

1. Pokazać, że zachodzi nierównośc:

$$(1+a)^x \leqslant 1 + ax$$

dla $a \geqslant -1$ i $x \leqslant 1$

2. Pokazać, że dla a, b całkowitych dodatnich zachodzi nierówność:

$$a^a + b^b \geqslant ab$$

3. Pokazać, że dla a dodatniego zachodzi nierówność:

$$a^{a^2} + a^{2a} > 1$$

4. Liczby rzeczywiste a, b, c należą do przedziału $[0, 1]$. Pokazać, że zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leqslant 2$$

5. W czworościanie $OABC$ oznaczmy $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$ oraz $\angle AOB = \gamma$. Niech σ będzie kątem pomiędzy ścianami OAB i OAC, zaś τ pomiędzy ścianami OBA i OBC. Pokazać, że:

$$\gamma > \beta \cos\sigma + \alpha \cos\tau$$

.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Znaleźć wszystkie takie punkty P należące do jego wnętrza, że:

$$[ABP][CDP] = [BCP][ADP]$$

7. Znaleźć wszystkie trójki (x, y, z) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2}{1+x^2} \\ z = \frac{2y^2}{1+y^2} \\ x = \frac{2z^2}{1+z^2} \end{cases}$$