Zadania - dzień trzeci

grupa pierwszoklasistów

czwartek, 27 września 2007

41. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{abc}$$

Pokazać, że spełniają też nierówność:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$$

42. Niech AD i BE będą wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, w którym M jest środkiem boku AB, a $\angle ACB = 60°$. Udowodnić, że trójkąt MDE jest równoboczny.

43. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y spełniające równość:

$$7^x - 3 \cdot 2^y = 1$$

44. Trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB \| CD$ i $AB > CD$, jest wpisany w okrąg ω o środku w O. Jego przekątne przecinają się w punkcie P. Punkty M i N leżą odpowiednio na odcinkach AC i BD tak, by $2\angle MON = \angle BPC$. Udowodnić, że cięciwa okręgu ω przechodząca przez punkty M i N ma długość AC.

45. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 19×19 z wyciętym rogiem da się pokryć następującymi klockami (klocki można obracać, ale nie można odbijać symetrycznie):

(Tu następują rysunki klocków: prostokąt 4×1 z dołożonym kwadracikiem po prawej o jeden od góry, kwadrat 2×2 z dołożonym kwadracikiem po lewej u dołu oraz prostokąt 5×1)

Zadania - dzień trzeci

grupa młodsza

czwartek, 27 września 2007

41. Liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówność:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{abc}$$

Pokazać, że spełniają też nierówność:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geqslant \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$$

43. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y spełniające równość:

$$7^x - 3 \cdot 2^y = 1$$

44. Trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB \| CD$ i $AB > CD$, jest wpisany w okrąg ω o środku w O. Jego przekątne przecinają się w punkcie P. Punkty M i N leżą odpowiednio na odcinkach AC i BD tak, by $2\angle MON = \angle BPC$. Udowodnić, że cięciwa okręgu ω przechodząca przez punkty M i N ma długość AC.

45. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 19×19 z wyciętym rogiem da się pokryć następującymi klockami (klocki można obracać, ale nie można odbijać symetrycznie):

(Tu następują rysunki klocków: prostokąt 4×1 z dołożonym kwadracikiem po prawej o jeden od góry, kwadrat 2×2 z dołożonym kwadracikiem po lewej u dołu oraz prostokąt 5×1)

46. Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

Zadania - dzień trzeci

grupa starsza

czwartek, 27 września 2007

43. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, y spełniające równość:

$$7^x - 3 \cdot 2^y = 1$$

44. Trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB \| CD$ i $AB > CD$, jest wpisany w okrąg ω o środku w O. Jego przekątne przecinają się w punkcie P. Punkty M i N leżą odpowiednio na odcinkach AC i BD tak, by $2\angle MON = \angle BPC$. Udowodnić, że cięciwa okręgu ω przechodząca przez punkty M i N ma długość AC.

45. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 19×19 z wyciętym rogiem da się pokryć następującymi klockami (klocki można obracać, ale nie można odbijać symetrycznie):

(Tu następują rysunki klocków: prostokąt 4×1 z dołożonym kwadracikiem po prawej o jeden od góry, kwadrat 2×2 z dołożonym kwadracikiem po lewej u dołu oraz prostokąt 5×1)

46. Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

47. Wewnątrz lub na brzegu koła o promieniu 1 obrano n punktów. Pokazać, że istnieje punkt tego koła, którego suma odległości od tych punktów jest niemniejsza niż n.

48. Dany jest trójkąt równoboczny ABC wpisany w okrąg o. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których funkcja $f(P) = AP^n + BP^n + CP^n$ przyjmuje taką samą wartość dla wszystkich punktów leżących na okręgu.

Zadania - dzień trzeci

grupa najstarsza

czwartek, 27 września 2007

44. Trapez równoramienny $ABCD$, w którym $AB \| CD$ i $AB > CD$, jest wpisany w okrąg ω o środku w O. Jego przekątne przecinają się w punkcie P. Punkty M i N leżą odpowiednio na odcinkach AC i BD tak, by $2\angle MON = \angle BPC$. Udowodnić, że cięciwa okręgu ω przechodząca przez punkty M i N ma długość AC.

45. Rozstrzygnąć, czy szachownicę 19×19 z wyciętym rogiem da się pokryć następującymi klockami (klocki można obracać, ale nie można odbijać symetrycznie):

(Tu następują rysunki klocków: prostokąt 4×1 z dołożonym kwadracikiem po prawej o jeden od góry, kwadrat 2×2 z dołożonym kwadracikiem po lewej u dołu oraz prostokąt 5×1)

47. Wewnątrz lub na brzegu koła o promieniu 1 obrano n punktów. Pokazać, że istnieje punkt tego koła, którego suma odległości od tych punktów jest niemniejsza niż n.

48. Dany jest trójkąt równoboczny ABC wpisany w okrąg o. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, dla których funkcja $f(P) = AP^n + BP^n + CP^n$ przyjmuje taką samą wartość dla wszystkich punktów leżących na okręgu.

49. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $k \geqslant 2$ można znaleźć taką liczbę naturalną n, że

$$\frac{n}{\pi(n)} = k$$

410. Udowodnić nierówność

$$\frac{a}{b^2(c+1)} + \frac{b}{c^2(a+1)} + \frac{c}{a^2(b+1)} \geqslant \frac{3}{2}$$

gdzie a, b, c są liczbami rzeczywistymi dodatnimi spełniającymi warunek $abc = 1$.