Zadania - dzień pierwszy

grupa pierwszoklasistów

poniedziałek, 24 września 2007

11. Pokazać, że każdy $3n$-kąt wypukły da się podzielić na trójkąty tak, by w każdym wierzchołku spotykało się nieparzyście wiele trójkątów.

12. Wykazać, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

13. Niech $x, y, z \in [1, 2]$. Pokazać, że

$$3(x + y + z) \geqslant xy + yz + zx + 6$$

14. Sieść małych Skrzypenów pływa po bajolku w kształcie koła o plomieniu 1. Pokaziać, zie w kaźdym momencie siom pewne dwa Skrzypeny, któje siom od siebie oddajone o co najwyźej 1.

15. Niech a, b będą dwoma liczbami całkowitymi różnej parzystości. Pokazać, że istnieje taka liczba $c \in \mathbb{Z}$, że liczby $c + a, c + b, c + ab$ są kwadratami liczb całkowitych.

Zadania - dzień pierwszy

grupa młodsza

poniedziałek, 24 września 2007

12. Wykazać, że w dwunastokącie foremnym $A_1A_2\ldots A_{12}$ przekątne A_1A_5, A_3A_8 i A_4A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

13. Niech $x, y, z \in [1, 2]$. Pokazać, że

$$3(x + y + z) \geqslant xy + yz + zx + 6$$

14. Sieść małych Skrzypenów pływa po bajolku w kształcie koła o plomieniu 1. Pokaziać, zie w kaździm momencie siom pewne dwa Skrzypeny, któje siom od siebie oddajone o co najwyźej 1.

15. Niech a, b będą dwoma liczbami całkowitymi różnej parzystości. Pokazać, że istnieje taka liczba $c \in \mathbb{Z}$, że liczby $c + a, c + b, c + ab$ są kwadratami liczb całkowitych.

17. Pokazać, że dla każdego n naturalnego istnieje takie przedstawienie w postaci sumy liczb 2^s3^r, iż żaden składnik nie dzieli innego.

Zadania - dzień pierwszy

grupa starsza

poniedziałek, 24 września 2007

14. Sieść małych Skrzypenów pływa po bajolku w kształcie koła o plomieniu 1. Pokaziać, zie w kaździm momencie siom pewne dwa Skrzypeny, któje siom od siebie oddajone o co najwyźej 1.

15. Niech a, b będą dwoma liczbami całkowitymi różnej parzystości. Pokazać, że istnieje taka liczba $c \in \mathbb{Z}$, że liczby $c + a, c + b, c + ab$ są kwadratami liczb całkowitych.

16. Pokazać, że a, b, c dodatnich zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

17. Pokazać, że dla każdego n naturalnego istnieje takie przedstawienie w postaci sumy liczb $2^s 3^r$, iż żaden składnik nie dzieli innego.

18. Okręgi S_1 i S_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2, przecinają się w punktach M i N. Prosta t jest styczna do S_1 w A i S_2 w B oraz leży bliżej punktu M niż N. Prosta prostopadła do AM przechodząca przez punkt B przecina prostą O_1O_2 w punkcie C. Pokazać, że $\angle BMC = 90°$.

Zadania - dzień pierwszy

grupa najstarsza

poniedziałek, 24 września 2007

15. Niech a, b będą dwoma liczbami całkowitymi różnej parzystości. Pokazać, że istnieje taka liczba $c \in \mathbb{Z}$, że liczby $c+a, c+b, c+ab$ są kwadratami liczba całkowitych.

17. Pokazać, że dla każdego n naturalnego istnieje takie przedstawienie w postaci sumy liczb 2^s3^r, iż żaden składnik nie dzieli innego.

18. Okręgi S_1 i S_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2, przecinają się w punktach M i N. Prosta t jest styczna do S_1 w A i S_2 w B oraz leży bliżej punktu M niż N. Prosta prostopadła do AM przechodząca przez punkt B przecina prostą O_1O_2 w punkcie C. Pokazać, że $\angle BMC = 90°$.

19. Dana jest liczba naturalna c. Ciąg $\{p_n\}$ skonstruowany jest wedle następującej reguły: p_1 jest dowolną liczbą pierwszą, a dla $k \geqslant 1$ p_{k+1} jest dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $p_k + c$, nie występującym wśród liczb $p_1, p_2, ..., p_k$. Udowodnij, że ciąg $\{p_n\}$ jest skończony.

110. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \langle 0, +\infty) \longrightarrow \langle 0, +\infty)$ spełniające warunki:

(a) Dla każdych liczb nieujemnych x, y o dodatniej sumie zachodzi: $f(xf(y))f(y) = f(\frac{xy}{x+y})$.

(b) $f(1) = 0$.

(c) $f(x) > 0$ dla $x > 1$.