Trzecie zawody indywidualne

grupa pierwszoklasistów

wtorek, 28 września 2004

31. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnić, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie niewiększym niż 3.

32. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie x i y takie, że liczby $x^2 + y$ i $y^2 + x$ są kwadratami liczb całkowitych.

33. W kwadracie $ABCD$ na boku BC obrano dowolny punkt K. Okrąg opisany na trójkącie AKC ma środek w O. Wykazać, że $\measuredangle OAK = 45°$.

34. Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$ o boku 1 obrano odpowiednio punkty K, L, M, N. Wykazać, że obwód czworokąta $KLMN$ jest niewiększy niż $2\sqrt{2}$.

35. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(x + y) = f(x^2) + f(y^2).$$

314. Joasia napisała ciąg $n^2 + 1$ różnych liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje w tym ciągu podciąg monotoniczny (tj. rosnący bądź malejący) długości $n + 1$.

Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

wtorek, 28 września 2004

31. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnić, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie niewiększym niż 3.

32. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie x i y takie, że liczby x^2+y i y^2+x są kwadratami liczb całkowitych.

33. W kwadracie $ABCD$ na boku BC obrano dowolny punkt K. Okrąg opisany na trójkącie AKC ma środek w O. Wykazać, że $\measuredangle OAK = 45^\circ$.

34. Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$ o boku 1 obrano odpowiednio punkty K, L, M, N. Wykazać, że obwód czworokąta $KLMN$ jest niewiększy niż $2\sqrt{2}$.

35. Znaleźć wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x,y\in\mathbb{R}$ równość

$$f(x+y)=f(x^2)+f(y^2).$$

36. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$a^5+a^3b^2+a^2b^3+b^5 \geqslant 2(a^4b+ab^4).$$

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

wtorek, 28 września 2004

31. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnić, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie niewiększym niż 3.

34. Na bokach AB, BC, CD i DA kwadratu $ABCD$ o boku 1 obrano odpowiednio punkty K, L, M, N. Wykazać, że obwód czworokąta $KLMN$ jest niewiększy niż $2\sqrt{2}$.

37. Okręgi ω_1 i ω_2 wpisane są w kąt o wierzchołku w P. Okrąg ω jest styczny zewnętrznie do okręgów ω_1 i ω_2 odpowiednio w punktach A i B. Wykazać, że punkty P, A i B są współliniowe.

38. Niech F_n będzie ciągiem zdefiniowanym następująco: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Niech $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Wykazać, że[1]

$$NWD(F_a, F_b) = F_{NWD(a,b)}.$$

39. Dana jest liczba całkowita $n > 2$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą H i największą liczbę rzeczywistą h takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$h \leqslant \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n}{x_n + x_1} \leqslant H.$$

314. Joasia napisała ciąg $n^2 + 1$ różnych liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje w tym ciągu podciąg monotoniczny (tj. rosnący bądź malejący) długości $n + 1$.

[1] Wzór, który jest tezą tego zadania, można znaleźć w niektórych tablicach. Powołanie się na tablice nie jest rozwiązaniem zadania.

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

wtorek, 28 września 2004

31. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnić, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie niewiększym niż 3.

39. Dana jest liczba całkowita $n > 2$. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzeczywistą H i największą liczbę rzeczywistą h takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$h \leqslant \frac{x_1}{x_1+x_2} + \frac{x_2}{x_2+x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n} + \frac{x_n}{x_n+x_1} \leqslant H.$$

310. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ spełnia warunek $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$ dla każdych liczb całkowitych dodatnich n i m. Wykazać, że dla każdym $n, m \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi nierówność

$$a_n \leqslant ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m.$$

311. k-tą liczbą Fermata nazywamy $F_k = 2^{2^k} + 1$. Niech $n > 0$ będzie liczbą całkowitą. Wykazać, że jeśli

$$F_n \mid 3^{\frac{F_n - 1}{2}} + 1,$$

to liczba F_n jest pierwsza.

312. Niech H będzie ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC. Okręgi opisane na trójkątach BCH, ACH i ABH mają środki odpowiednio w punktach O_1, O_2 i O_3. Wykazać, że proste AO_1, BO_2 i CO_3 przecinają się w jednym punkcie.

313. Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q i R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość

$$AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.