Zadania powtórzeniowe

grupa pierwszoklasistów

czwartek, 30 września 2004

51. W trójkącie ostrokątnym ABC proste zawierające wysokości AD, BE i CF przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach K, L, M różnych od wierzchołków trójkąta. Obliczyć możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $ALCKBM$ do pola trójkąta ABC.

52. Na płaszczyźnie dane są różne punkty A, O i I. Skonstruować trójkąt, którego wierzchołkiem będzie punkt A, środkiem okręgu opisanego będzie O, zaś środkiem okręgu wpisanego będzie I.

53. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 2. Niech M będzie środkiem boku BC, zaś X i Y takimi punktami na bokach AB i AD odpowiednio, że $AX = AY$ oraz $XM + MY = \sqrt{10}$. Udowodnić, że $\measuredangle BXM = \measuredangle AYM$.

54. Znaleźć wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ równanie: $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

55. *Punktem kratowym* na płaszczyźnie nazywamy punkt o obydwu współrzędnych całkowitych. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 będą parami różnymi punktami kratowymi. Udowodnić, że istnieją takie i, j, że odcinek A_iA_j zawiera przynajmniej jeden punkt kratowy z wyjątkiem A_i i A_j.

56. Wykazać, że jeśli liczby a, k, l, m, p i q są naturalne, to

(a) jeśli spełniają równanie $4^p + a^2 = 7^q$, to $2 \mid q$.

(b) jeśli spełniają równanie $k^2 + l^2 = 7m$, to $7 \mid k$ i $7 \mid l$.

57. Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna n, że

$$541 \mid 2003n - 2005.$$

58. Z szachownicy 8×8 wycięto jedno narożne pole. Rozstrzygnąć, czy można pokryć zubożałą szachownicę klockami 3×1.

59. Dana jest szachownica 2004×2004. Na każdym polu leży kamień. Wykonujemy następujące ruchy: jeżeli na pierwszym i trzecim z trzech kolejnych pól leżących w jednym wierszu lub kolumnie leży kamień, to możemy oba te kamienie przełożyć na drugie z tych pól (niezależnie od tego, czy jakiś kamień leży na środkowym polu, i czy ruch opróżni jakiekolwiek pole). Rozstrzygnąć, czy można wykonując takie ruchy przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

Zadania powtórzeniowe

grupa młodsza

czwartek, 30 września 2004

51. W trójkącie ostrokątnym ABC proste zawierające wysokości AD, BE i CF przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach K, L, M różnych od wierzchołków trójkąta. Obliczyć możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $ALCKBM$ do pola trójkąta ABC.

53. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 2. Niech M będzie środkiem boku BC, zaś X i Y takimi punktami na bokach AB i AD odpowiednio, że $AX = AY$ oraz $XM + MY = \sqrt{10}$. Udowodnić, że $\measuredangle BXM = \measuredangle AYM$.

54. Znaleźć wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ równanie: $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

55. *Punktem kratowym* na płaszczyźnie nazywamy punkt o obydwu współrzędnych całkowitych. Niech A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5 będą parami różnymi punktami kratowymi. Udowodnić, że istnieją takie i, j, że odcinek A_iA_j zawiera przynajmniej jeden punkt kratowy z wyjątkiem A_i i A_j.

56. Wykazać, że jeśli liczby a, k, l, m, p i q są naturalne, to

(a) jeśli spełniają równanie $4^p + a^2 = 7^q$, to $2 \mid q$.

(b) jeśli spełniają równanie $k^2 + l^2 = 7m$, to $7 \mid k$ i $7 \mid l$.

57. Wykazać, że istnieje taka liczba naturalna n, że

$$541 \mid 2003n - 2005.$$

58. Z szachownicy 8×8 wycięto jedno narożne pole. Rozstrzygnąć, czy można pokryć zubożałą szachownicę klockami 3×1.

513. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\left\lfloor \frac{10^p}{p} \right\rfloor$$

jest podzielna przez 10.

Zadania powtórzeniowe

grupa starsza

czwartek, 30 września 2004

510. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich x, y spełniające równanie $y^x = x^{50}$.

511. Dany jest czworościan $ABCD$. Obrano takie punkty E, F i G na odpowiednio płaszczyznach ABD, BCD i CAD, by czworokąty $ADBE$, $DBCF$ i $CDAG$ były równoległobokami. Pokazać, że trójkąty GFE i ABC są przystające.

512. W pewnym czworościanie dwie pary naprzeciwległych krawędzi są prostopadłe. Wykazać, że środki krawędzi tego czworościanu leżą na jednej sferze.

513. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\left\lfloor \frac{10^p}{p} \right\rfloor$$

jest podzielna przez 10.

514. Wykaż, że dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, których suma jest równa 1, oraz liczby dodatniej p zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^p \geqslant \frac{(n^2+1)^p}{n^{p-1}}.$$

520. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P.

(a) Wykazać, że odbicia symetryczne prostych AP, BP i CP wzgledem odpowiednio dwusiecznych wewnętrznych kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie Q.

(b) Wykazać, że rzuty prostokątne punktów P i Q na boki trójkąta ABC leżą wszystkie na jednym okręgu.

Zadania powtórzeniowe

grupa najstarsza

czwartek, 30 września 2004

513. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze p, dla których liczba

$$\left\lfloor \frac{10^p}{p} \right\rfloor$$

jest podzielna przez 10.

515. Proste l, m, n, styczne do paraboli p, przecinają się w punktach A, B, C. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie ABC przechodzi przez ognisko paraboli p.

516. W czworościanie prowadzimy przez środek każdej krawędzi płaszczyznę prostopadłą do naprzeciwległej krawędzi. Wykazać, że wszystkie otrzymane w ten sposób płaszczyzny mają punkt wspólny.

517. W pewnym ciągu arytmetycznym liczb całkowitych istnieje wyraz, będący kwadratem liczby całkowitej, oraz wyraz, będący sześcianem liczby całkowitej. Wykazać, że w tym ciągu istnieje wyraz, będący szóstą potęgą liczby całkowitej.

518. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$a^3b + ab^3 + 2a^3 + 2b^3 + 2 \geqslant 2a^2b + 2ab^2 + a^2 + b^2 + 2ab$$

519. Udowodnić, że z dowolnych siedmiu różnych liczb rzeczywistych można wybrać dwie liczby x i y takie, że

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$