Mecz matematyczny

grupa młodsza

piątek, 1 października 2004

61. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie a, b, c, d, które spełniają układ równań
$$\begin{cases} a+b=cd \\ c+d=ab. \end{cases}$$

62. Wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$ dany jest punkt P taki, że trójkąty ABP, BCP, CDP i DAP mają równe pola. Wykazać, że przynajmniej jedna z przekątnych czworokąta $ABCD$ dzieli go na trójkąty o równych polach.

63. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a, b > 0$ zachodzi nierówność
$$\frac{a^3+b^6}{2} \geqslant 3ab^2 - 4.$$

64. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w P. Niech PG i PH będą środkowymi odpowiednio trójkątów BPC i APD poprowadzonymi z wierzchołka P. Dwusieczna kąta BPC przecina prostą GH w punkcie F. Pokazać, że
$$\frac{GF}{HF} = \frac{BC}{AD}.$$

65. W trójkącie ABC kąt BCA jest rozwarty oraz $\measuredangle BAC = 2\cdot\measuredangle ABC$. Prosta przechodząca przez punkt B i prostopadła do boku BC przecina prostą AC w punkcie D. Punkt M jest środkiem boku AB. Dowieść, że $\measuredangle AMC = \measuredangle BMD$.

66. Rozstrzygnąć, czy da się pokryć prostokąt 5×7 trójpolowymi *L-kami* tak, by każde pole było pokryte przez tą samą ilość *L-ek*.

67. Prowadzimy w czworościanie cztery proste łączące jego wierzchołki ze środkami okręgów wpisanych w przeciwległe ściany. Wykazać, że jeśli dwie spośród tych prostych przecinają się, to dwie pozostałe także.

68. Wielomian W, stopnia większego od czterech, o współczynnikach całkowitych, przyjmuje dla co najmniej pięciu różnych argumentów całkowitych wartość 5. Wykazać, że nie może on dla argumentu całkowitego przyjmować wartości 96.

69. Dana jest przestrzenna szachownica o 48 polach, składająca się z trzech parami sąsiednich ścian sześcianu, każdej podzielonej na 16 jednostkowych kwadratów. Wykazać, że tej szachownicy nie da się okleić 16 paskami o wymiarach 3×1 tak, by każdy pasek pokrywał trzy jednostkowe kwadraty.

610. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1.$$

Udowodnić nierówność

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

611. *Superciąg Zdanowicza* (a_n) zdefiniowany jest następująco: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że $|W(a_i)| = 1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 2004$. Wykazać, że dla żadnego całkowitego n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 2003.

Mecz matematyczny

grupa starsza

piątek, 1 października 2004

69. Dana jest przestrzenna szachownica o 48 polach, składająca się z trzech parami sąsiednich ścian sześcianu, każdej podzielonej na 16 jednostkowych kwadratów. Wykazać, że tej szachownicy nie da się okleić 16 paskami o wymiarach 3×1 tak, by każdy pasek pokrywał trzy jednostkowe kwadraty.

610. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1.$$

Udowodnić nierówność

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n[1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)(1 - a_1)(1 - a_2)\ldots(1 - a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

611. *Superciąg Zdanowicza* (a_n) zdefiniowany jest następująco: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że $|W(a_i)| = 1$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, 2004$. Wykazać, że dla żadnego całkowitego n liczba $W(n)$ nie jest podzielna przez 2003.

612. Okręgi ω i Ω są styczne wewnętrznie w punkcie N, przy czym okrąg ω ma promień mniejszy od promienia okręgu Ω. Styczna w punkcie X do okręgu ω przecina okrąg Ω w punktach A i B. Punkt M jest środkiem łuku AB nie zawierającym N. Wykazać, że promień okręgu opisanego na trójkącie BMX nie zależy od wyboru punktu X.

613. Niech $S(n)$ oznacza sumę cyfr liczby całkowitej dodatniej n. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie m, dla których dla każdego całkowitego dodatniego $k \leqslant m$ zachodzi $S(m) = S(km)$.

614. Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty P, Q i R, zaś na odcinkach QR, RP i PQ punkty A', B' i C' tak, by $AB \| A'B'$, $BC \| B'C'$ i $AC \| A'C'$. Wykazać, że

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{P_{A'B'C'}}{P_{PQR}}.$$

615. Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

616. Punkt P leży na boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkty D i E są takimi punktami odpowiednio na półprostych $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$, że

$$\measuredangle ACB = \measuredangle APD = \measuredangle BPE.$$

Punkt M jest drugim, po P, przecięciem okręgów opisanych na trójkątach APD i BPE. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu M, przy punkcie P poruszającym się po boku AB.

617. Rozstrzygnąć, czy istnieją 2004 kolejne liczby naturalne, z których każda ma przynajmniej 2004 różnych dzielników pierwszych.

618. Niech $n > 1$ bedzie liczbą całkowitą, zaś X zbiorem wszystkich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Podzbiór $Y \subset X$ jest *koloru fuksja* jeśli żaden jego element nie zawiera się w innym jego elemencie. Wyznaczyć maksymalną liczbę elementów pozbioru *koloru fuksja*.

619. Rozstrzygnąć, czy istnieje skończony zbiór liczb rzeczywistych M taki, że dla dowolnie dużego $k \in \mathbb{N}$ istnieje wielomian stopnia niemniejszego niż k o współczynnikach z M, którego wszystkie pierwiastki są rzeczywiste, różne od 0 i należą do M.