Zawody drużynowe

grupa młodsza

środa, 29 września 2004

41. Joasia i Onufry grają w grę. Na szachownicy 541×541 w lewym dolnym rogu stoi król-inwalida. Król-inwalida potrafi się poruszać o jedno pole tylko w górę, w prawo i na skos w prawo w górę. Joasia rozpoczyna, gracze na przemian poruszają królem. Kto pierwszy dojdzie do prawego górnego rogu, wygrywa. Czy Joasia może wygrać?

42. Wykazać, że jeśli liczba $n > 1$ jest złożona, to da się ją przedstawić w postaci sumy czterech liczb całkowitych dodatnich a, b, c i d takich, że $ab = cd$.

43. Liczby całkowite x, y i z spełniają warunek

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Wykazać, że $27 \mid x+y+z$.

44. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg na bokach AB, BC, CD i, DA obrano punkty E, F, G, H odpowiednio. Wykazać, że jeśli zachodzi równość

$$AE \cdot BE = BF \cdot CF = CG \cdot DG = DH \cdot HA$$

to punkty E, F, G, H leżą na jednym okręgu.

45. Punkt E należy do boku AB, punkt F do boku BC trójkąta ABC, odcinki AF i CE przecinają się w punkcie D i $AE = CF$. W czworokąt $DEBF$ można wpisać okrąg. Wykazać, że $AB = BC$.

46. Joasia na tablicy napisała n jedynek. W jednym ruchu ściera dwie liczby, a zamiast nich pisze połowę ich średniej arytmetycznej. Joasia kończy zabawę, jak zostanie na tablicy jedna liczba. Wykazać, że końcowa liczba nie może być mniejsza niż $\frac{1}{n}$.

47. Joasia i Onufry grają w grę. W pudełku jest 300 ketchupów z McDonalda. Ruch polega na wyjęciu niewięcej niż połowy ketchupów z pudełka. Joasia zaczyna, gracze wykonują ruchy na przemian, kto nie może wykonać ruchu przegrywa. Kto ma strategię wygrywającą?

48. W Księstwie Hofmańskim jest $n > 541$ miast, niektóre z nich są połączone drogami dwukierunkowymi, przy czym z każdego miasta wychodzą przynajmniej trzy drogi. Wykazać, że w Księstwie istnieje cykl dróg parzystej długości.

49. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(f(x)) + f(-y) = x + y.$$

410. Dany jest *„krzywy graniastosłup”* trójkątny $ABCA'B'C'$ (tj. podstawy ABC i $A'B'C'$ są niekoniecznie przystające i równoległe, a ściany $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ są dowolnymi czworokątami). Punkty F, D i E są przecięciami przekątnych odpowiednio ścian $ABB'A'$, $BCC'B'$ i $CAA'C'$. Wykazać że proste AD, BE i CF mają punkt wspólny.

Zawody drużynowe

grupa starsza

środa, 29 września 2004

47. Joasia i Onufry grają w grę. W pudełku jest 300 ketchupów z McDonalda. Ruch polega na wyjęciu niewięcej niż połowy ketchupów z pudełka. Joasia zaczyna, gracze wykonują ruchy na przemian, kto nie może wykonać ruchu przegrywa. Kto ma strategię wygrywającą?

48. W Księstwie Hofmańskim jest $n > 541$ miast, niektóre z nich są połączone drogami dwukierunkowymi, przy czym z każdego miasta wychodzą przynajmniej trzy drogi. Wykazać, że w Księstwie istnieje cykl dróg parzystej długości.

49. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(f(x)) + f(-y) = x + y.$$

410. Dany jest *„krzywy graniastosłup”* trójkątny $ABCA'B'C'$ (tj. podstawy ABC i $A'B'C'$ są niekoniecznie przystające i równoległe, a ściany $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$ są dowolnymi czworokątami). Punkty F, D i E są przecięciami przekątnych odpowiednio ścian $ABB'A'$, $BCC'B'$ i $CAA'C'$. Wykazać że proste AD, BE i CF mają punkt wspólny.

411. Dana jest liczba całkowita $n > 1$ i wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$, gdzie współczynniki $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ są nieujemne. Wielomian $W(x)$ ma n pierwiastków rzeczywistych. Wykazać, że $W(2) \geqslant 3^n$.

412. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego, a punkty A', B' i C' są środkami okręgów dopisanych leżących odpowienio naprzeciw wierzchołków A, B i C. Dwusieczna kąta BIC przecina bok BC w punkcie A'', analogicznie znajdujemy punkty B'' i C''. Wykazać, że proste $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ mają punkt wspólny.

413. Czy można podzielić zbiór liczb całkowitych nieujemnych na dwa rozłączne podzbiory tak, by dla każdego całkowitego dodatniego n równanie $n = x + y$ dla $x \neq y$ miało tyle samo rozwiązań w obu podzbiorach?

414. Dane są takie $a, b \in \mathbb{N}$, że $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}$. Wykazać, że największy wspólny dzielnik a i b jest niewiększy niż $\sqrt{a+b}$.

415. Niech M i N będą takimi punktami wewnątrz trójkąta ABC, że kąty MAB i NAC oraz MBA i NBC są równe. Udowodnić, że:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot DN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1$$

416. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_n$ będą liczbami rzeczywistymi większymi równymi 1. Udowodnić nierówność:

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \ldots + \frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n} + 1}$$