Drugie zawody indywidualne

grupa pierwszoklasistów

poniedziałek, 27 września 2004

21. Rozwiązać w $x, y, z \in \mathbb{N}$ równanie

$$2^x + 3^y = z^2.$$

22. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb naturalnych a_n taki, że dla każdej liczby naturalnej k ciąg $k + a_n$ zawiera skończenie wiele liczb pierwszych.

23. Zabawa polega na przenoszeniu kamyka. Startujemy z $(1, 1)$. Dozwolone są ruchy: przeniesienie z (a, b) na $(2a, b)$ lub $(a, 2b)$ i przeniesienie z (a, b) na $(a - b, b)$ jeśli $a > b$ oraz na $(a, b - a)$ jeśli $b > a$. Rozstrzygnąć dla jakich $x, y \in \mathbb{Z}^+$ można przenieść kamyk na (x, y).

24. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach D, E i F odpowiednio. W kąty BAC, ABC i ACB wpisujemy okręgi o promieniach krótszych od promienia okręgu wpisanego, styczne do niego i do ramion odpowiedniego kąta. Okręgi te są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio w punktach K, L i M. Obliczyć możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $DLFKEM$ do pola trójkąta KLM.

210. Port w Hofmanville jest strzeżony przez szesnastu agentów. Każdy agent obserwuje jednego lub więcej innych agentów, przy czym żadni dwaj agenci nie obserwują się nawzajem. Dodatkowo każdych dziesięciu agentów da się ponumerować tak, aby pierwszy obserwował drugiego, drugi, trzeciego, itd. aż ostatni obserwował pierwszego. Wykazać, że każdych jedenastu agentów można analogicznie ponumerować.

Drugie zawody indywidualne

grupa młodsza

poniedziałek, 27 września 2004

21. Rozwiązać w $x, y, z \in \mathbb{N}$ równanie

$$2^x + 3^y = z^2.$$

22. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg liczb naturalnych a_n taki, że dla każdej liczby naturalnej k ciąg $k + a_n$ zawiera skończenie wiele liczb pierwszych.

23. Zabawa polega na przenoszeniu kamyka. Startujemy z $(1, 1)$. Dozwolone są ruchy: przeniesienie z (a, b) na $(2a, b)$ lub $(a, 2b)$ i przeniesienie z (a, b) na $(a - b, b)$ jeśli $a > b$ oraz na $(a, b - a)$ jeśli $b > a$. Rozstrzygnąć dla jakich $x, y \in \mathbb{Z}^+$ można przenieść kamyk na (x, y).

24. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA i AB w punktach D, E i F odpowiednio. W kąty BAC, ABC i ACB wpisujemy okręgi o promieniach krótszych od promienia okręgu wpisanego, styczne do niego i do ramion odpowiedniego kąta. Okręgi te są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt ABC odpowiednio w punktach K, L i M. Obliczyć możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $DLFKEM$ do pola trójkąta KLM.

25. Na przyjęciu u Joasi jest n kobiet i n mężczyzn. Każda kobieta lubi r sposród mężczyzn, zaś każdy mężczyzna lubi s spośród kobiet. Wykazać, że jeśli $r + s > n$, to istnieje mężczyzna i kobieta, którzy lubią się nawzajem. Wykazać, że jeśli $r + s \leqslant n$, to możliwe jest, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

Drugie zawody indywidualne

grupa starsza

poniedziałek, 27 września 2004

21. Rozwiązać w $x, y, z \in \mathbb{N}$ równanie

$$2^x + 3^y = z^2.$$

25. Na przyjęciu u Joasi jest n kobiet i n mężczyzn. Każda kobieta lubi r sposród mężczyzn, zaś każdy mężczyzna lubi s spośród kobiet. Wykazać, że jeśli $r + s > n$, to istnieje mężczyzna i kobieta, którzy lubią się nawzajem. Wykazać, że jeśli $r + s \leqslant n$, to możliwe jest, że każde uczucie jest nieodwzajemnione.

26. Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań w $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1+4x^2} = y \\ \frac{4y^2}{1+4y^2} = z \\ \frac{4z^2}{1+4z^2} = x \end{cases}$$

27. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych.

28. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum. Prosta przechodząca przez punkt E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w punkcie S. Wykazać, że prosta ST jest prostopadła do boku AB.

Drugie zawody indywidualne

grupa najstarsza

poniedziałek, 27 września 2004

21. Rozwiązać w $x, y, z \in \mathbb{N}$ równanie

$$2^x + 3^y = z^2.$$

27. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych dodatnich takich, że kwadrat każdej z nich pomniejszony o jeden jest podzielny przez każdą z pozostałych.

28. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, zaś H jest jego ortocentrum. Prosta przechodząca przez punkt E i środek odcinka CH przecina odcinek CD w punkcie T, zaś odcinki DF i BH przecinają się w punkcie S. Wykazać, że prosta ST jest prostopadła do boku AB.

29. Dane są dwie liczby całkowite dodatnie A i B. Na tablicy napisano $n > 1$ liczb całkowitych, z których nie wszystkie są różne. W ruchu Joasia może zmazać dwie takie same liczby m i napisać zamiast nich $m + A$ i $m - B$. Wykazać, że Joasia nie może mazać w nieskończoność.

210. Port w Hofmanville jest strzeżony przez szesnastu agentów. Każdy agent obserwuje jednego lub więcej innych agentów, przy czym żadni dwaj agenci nie obserwują się nawzajem. Dodatkowo każdych dziesięciu agentów da się ponumerować tak, aby pierwszy obserwował drugiego, drugi, trzeciego, itd. aż ostatni obserwował pierwszego. Wykazać, że każdych jedenastu agentów można analogicznie ponumerować.