# Teoria liczb

grupa starsza

poniedziałek, 27 września 2004

## Równania teorioliczbowe.

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych $x, y, z$.

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0.$$

2. Rozwiązać w liczbach całkowitych dodatnich $x, y$:

$$x^2 + 3y^2 = 1998x.$$

3. Zadanie z poniedziałku, z szacowaniem.
4. Kwadraty w zadaniach. Dane są liczby całkowite nieujemne $a$ i $b$, takie, że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej $n$ liczba $2^n a + b$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wykazać, że $a = 0$.

## Ciąg Fibonacciego.

1. Dla każdego $k$ istnieje $x$, że $k \mid F_x$.
2. $NWD(F_{n+1}, F_n) = 1$.
3. $n \mid m \;\Rightarrow\; F_n \mid F_m$.
4. $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 2$.
5. $F_n^2 = F_{n-1} * F_{n+1} + (-1)^{n+1}$.

**Reszty kwadratowe.** Jeśli rozpatrzymy liczby $1^2, \ldots, (p-1)^2$ modulo liczba pierwsza nieparzysta $p$, to otrzymamy dokładnie $\frac{p-1}{2}$ różnych reszt, każdą dokładnie 2 razy.

1. Wykazać, że jeśli $p > 3$ jest pierwsze, to istnieją liczby całkowite $x, y, k$ takie, że $0 < 2k < p$ i

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

**Małe twierdzenie Fermata.** Jeśli $p$ jest pierwsza, a $a$ całkowita, to $p \mid a^p - a$. Jeśli $p$ nie dzieli $a$, to $p \mid a^{p-1} - 1$.

**Twierdzenie Eulera.** Jeśli $n$ jest całkowita dodatnia, a $a$ całkowita względnie pierwsza z $n$, to $n \mid a^{\phi(n)} - 1$, gdzie $\phi(n)$ oznacza liczbę liczb mniejszych od $n$ względnie pierwszych z $n$.

**Zadania na MTF i Eulera. "Cebulkologia".**

1. Niech $p$ będzie liczbą pierwszą. Wykazać, że jeśli liczba $11\dots1$ ($p$ jedynek) dzieli się przez $p$, to $p = 3$.
2. Wykazać, że jeśli $p$ jest pierwsze, to $p \mid 11\dots122\dots2\dots99\dots9 - 123456789$ (każda cyfra pojawia się w odjemnej $p$ razy).
3. Wykazać, że jeśli $p \mid a^p - b^p$, $p$ pierwsze, $a, b$ całkowite, to $p^2 \mid a^p - b^p$.
4. Wykazać, że żadna liczba $n > 1$ nie spełnia warunku $n \mid 2^n - 1$.

**Algorytm euklidesa i dzielenie modulo $p$.**

1. Jakie są liczby $a, b < 1000$, że algorytm euklidesa dla nich działa najwolniej?
2. Wykazać, że jeśli $d = NWD(a, b)$, to istnieją liczby całkowite $x$ i $y$, że $d = ax + by$.
3. Wniosek: dla każdej liczby $0 < x < p$ ($p$ - pierwsze) istnieje dokładnie jedna liczba $0 < y < p$ taka, że $p \mid xy - 1$.

**Ciało $\mathbb{Z}_p$.** Reszty z dzielenia przez $p$ dla $p$ pierwszego tworzą pełnoprawne ciało. Można dzielić przez reszty (poza zerem oczywiście). Wielomiany w $\mathbb{Z}_p$ mają rozwiązania, zachodzi tw. Bezout.

**Twierdzenie Wilsona.** Jeśli $p$ jest pierwsze, to $p \mid (p-1)! + 1$.

**Chińskie twierdzenie o resztach.** Jeśli liczby całkowite $n_1, n_2, \dots, n_k$ są parami względnie pierwsze i $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, zaś liczby $a_1, a_2, \dots, a_k$ są dowolnymi liczbami całkowitymi, to istnieje dokładnie jedna liczba całkowita $0 \leqslant x < n$ taka, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ zachodzi własność:

$$x \equiv a_i \mod n_i.$$

Inaczej mówiąc, możemy żądać od $x$, aby miała określone reszty z dzielenia przez względnie pierwsze liczby $n_i$, i to twierdzenie nam gwarantuje, że dokładnie jedna liczba taka poniżej $n$ będzie istnieć.

1. Czy istnieje zbiór 2004 liczb całkowitych dodatnich taki, że suma każdego niepustego podzbioru jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku większym od jednego?

## Stożkowe

grupa starsza

środa, 29 września 2004

**Elipsa.** Zbiór punktów o równej sumie odległości od dwóch punktów, zwanych ogniskami.

1. Elipsa w stożku.

2. Ognisko odbite względem stycznej, punkt styczności i drugie ognisko są współliniowe.

3. Rzuty ognisk na styczne leżą na okręgu.

4. **Zadanie**: Dane są ogniska i długość dużej osi elipsy oraz punkt $P$, który do tej elipsy nie należy. Skonstruować prostą styczną do tej elipsy, przechodzącą przez punkt $P$.

5. **Zadanie**: Wykazać, że iloczyn odległości ognisk danej elipsy od prostej stycznej do tej elipsy nie zależy od wyboru stycznej.

6. Elipsa wpisana w kąt wtw. kąty międay ogniskami a ramionami są równe.

7. Zastosowanie powyższego w trójkącie: punkty dualne. Dualność ortocentrum i środka okregu opisanego.

8. **Zadanie*, finał 54 OM**: Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $X$, zaś sfera dopisana naprzeciwko wierzchołka $D$ jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $Y$. Wykazać, że $X$ jest ortocentrum $ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y$ jest środkiem okręgu opisanego.

**Parabola.** Zbiór punktów o równej odległości od prostej (kierownicy) i punktu (ogniska).

1. Ognisko odbite względem stycznej ląduje na kierownicy.

2. **Zadanie**: Znaleźć zbiór rzutów ogniska na styczne.

3. **Zadanie**: Dane jest ognisko i kierownica paraboli oraz punkt $P$, który do tej paraboli nie należy. Skonstruować prostą styczną do tej paraboli, przechodzącą przez punkt $P$.

4. **Zadanie**: Proste $l$ i $m$ są styczne do paraboli $p$ odpowiednio w punktach $A$ i $B$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
   - ognisko paraboli $p$ leży na prostej $AB$,
   - proste $l$ i $m$ są prostopadłe,
   - punkt przecięcia prostych $l$ i $m$ należy do kierownicy paraboli $p$.

**Hiperbola.** Zbiór punktów o stałej różnicy odległości od dwóch punktów.

1. Zbiór obrazów symetrycznych ogniska względem stycznych.

2. Zbiór rzutów ognisk na styczne.

## Stożkowe

grupa najstarsza

wtorek, 28 września 2004

**Elipsa.** Zbiór punktów o równej sumie odległości od dwóch punktów, zwanych ogniskami.

1. Elipsa w stożku.
2. Ognisko odbite względem stycznej, punkt styczności i drugie ognisko są współliniowe.
3. Rzuty ognisk na styczne leżą na okręgu.
4. **Zadanie**: Dane są ogniska i długość dużej osi elipsy oraz punkt $P$, który do tej elipsy nie należy. Skonstruować prostą styczną do tej elipsy, przechodzącą przez punkt $P$.
5. **Zadanie**: Co to za punkty, z których widać elipsę pod kątem prostym?
6. **Zadanie**: Wykazać, że iloczyn odległości ognisk danej elipsy od prostej stycznej do tej elipsy nie zależy od wyboru stycznej.
7. Elipsa wpisana w kąt wtw. kąty między ogniskami a ramionami są równe.
8. Zastosowanie powyższego w trójkącie: punkty dualne. Dualność ortocentrum i środka okregu opisanego.
9. **Zadanie, finał 54 OM**: Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $X$, zaś sfera dopisana naprzeciwko wierzchołka $D$ jest styczna do ściany $ABC$ w punkcie $Y$. Wykazać, że $X$ jest ortocentrum $ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $Y$ jest środkiem okręgu opisanego.

**Parabola.** Zbiór punktów o równej odległości od prostej (kierownicy) i punktu (ogniska).

1. Ognisko odbite względem stycznej ląduje na kierownicy.
2. **Zadanie**: Znaleźć zbiór rzutów ogniska na styczne.
3. **Zadanie**: Dane jest ognisko i kierownica paraboli oraz punkt $P$, który do tej paraboli nie należy. Skonstruować prostą styczną do tej paraboli, przechodzącą przez punkt $P$.
4. **Zadanie**: Proste $l$ i $m$ są styczne do paraboli $p$ odpowiednio w punktach $A$ i $B$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
   - ognisko paraboli $p$ leży na prostej $AB$,
   - proste $l$ i $m$ są prostopadłe,
   - punkt przecięcia prostych $l$ i $m$ należy do kierownicy paraboli $p$.

**Hiperbola.** Zbiór punktów o stałej różnicy odległości od dwóch punktów.

1. Zbiór obrazów symetrycznych ogniska względem stycznych.
2. Zbiór rzutów ognisk na styczne.

**Zadania różne i różne fakciki.**

1. **Zadanie**: Wewnątrz trójkąta $ABC$ znajduje się punkt $P$.

   **(a)** Wykazać, że odbicia symetryczne prostych $AP$, $BP$ i $CP$ wzgledem odpowiednio dwusiecznych wewnętrznych kątów $A$, $B$ i $C$ trójkąta $ABC$ przecinają się w jednym punkcie $Q$.

   **(b)** Wykazać, że rzuty prostokątne punktów $P$ i $Q$ na boki trójkąta $ABC$ leżą wszystkie na jednym okręgu.

2. **Zadanie**: Niech $M$ i $N$ będą takimi punktami wewnątrz trójkąta $ABC$, że miary kątów $\measuredangle MAB$ i $\measuredangle NAC$ oraz $\measuredangle MBA$ i $\measuredangle NBC$ są równe. Udowodnij, że:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

3. **Fakt**: Twierdzenie Pascala i Brianchona działa również dla dowolnych stożkowych.

## Nierówności

grupa pierwszoklasistów

czwartek, 30 września 2004

**1.** Dowieść, że dla każdych rzeczywistych $a, b, c, d > 0$ zachodzi:

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$$

$$abc = 1 \quad \Rightarrow \quad (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) \geqslant 27$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8 \quad \Rightarrow \quad a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant bc(b + c) + ac(a + c) + ab(a + b)$$

$$\frac{abc}{d^2} + \frac{abd}{c^2} + \frac{acd}{b^2} + \frac{bcd}{a^2} \geqslant a + b + c + d$$

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ac + c^2ab$$

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

$$a + b + c + d \geqslant \sqrt[10]{\frac{4^5}{27}ab^2c^3d^4}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a + b + c + d}$$

**2.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ i dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leqslant \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1 + x_2} + \frac{1}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} + x_n} + \frac{1}{x_n + x_1} \geqslant \frac{n^2}{2}$$

$$(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)\ldots(x_{n-1} + x_n)(x_n + x_1) \geqslant 2^n x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \Rightarrow (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant (n + 1)^n x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-2} + x_{i+1}}{x_{i-1} + x_i} \geqslant n$$

**3.** Udowodnić, że jeśli $a, b, c$ są długościami boków trójkąta, to:

$$\frac{3}{2} \leqslant \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a-b+c} + \frac{1}{-a+b+c}$$

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{a-b+c} + \sqrt{-a+b+c} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

## Wielomiany w kombinatoryce

grupa najstarsza

czwartek, 30 września 2004

**Dwumian Newtona, podstawowe tożsamości i dowody kombinatoryczne i wielomianowe.** Dużo dać, by wćwiczyć. Każdego przy tablicy do jednego.

**Liczby Stirlinga I i II rodzaju.** Jeśli liczby Bella robimy, tak naprawdę.

**Funkcje tworzące - definicja, pomysł.** Dodawanie, mnożenie. Wykładnicze funkcje tworzące.

**Rozwiązywanie równań rekurencyjnych.** Wpierw Fibonacciopodobne. Następnie liczby Catalana. I ew. liczby Bella.

**Enumeratory.** Przykład: kombinacje z powtórzeniami.

**Zasada właczeń i wyłączeń.**. $D(k)$ - liczba tych elementów z $X$, ktżoe mają dokładnie $k$ spośród własności $A_1, A_2, \ldots$. $S_i$ - suma mocy przecięć $i$-tek zbiorów.

$$D(k) = \sum_{j=k}^{\infty} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} S_j$$

Przykład: liczba funkcji z $n$ na $k$.

**Wieżomiany.** Funkcja tworząca. Jakiś przykład. Wzór z zabieraniem jednego. Wzor na odwracanie:

$$r_k(B) = \frac{1}{(m-k)!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-i}{k-i} (n-i)! r_i(C).$$

**Dzielenie liczby na sumę innych liczb.** Wpierw enumetator podstawowy. Dalej inne sztuczki: dokładnie tyle i tyle składników. Tylko nieparzyste. Itd.

**Diagram Ferrersa.** Tożsamość Eulera:

$$nP(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(n-k) P(k).$$

**Zadanka a'la Onufry.** Wyznaczyć wszystkie ciągi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ liczb nieujemnych o minimalnej długości, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 25, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 33, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 49, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^4 = 81.$$

# Metody sumowania i szacowania sum

grupa najstarsza

sobota, 2 października 2004

**Indukcja.** $H_{2^n} \leqslant n + 1$.

**Zaburzanie.** $ax^k$. $n2^n$. Zmiana kolejności sumowania.

**Rachunek różnicowy.** Definicja. Liniowość. Taka całka. Całkowanie przez części. Kilka przykładów.

**Szybko zmieniające się składniki.** Np. $\sum_{k=1}^{n} k^k$.

**Liczba nieporządków i jej oszacowanie.** Rozwinięcie $e^x$ w szereg.

**Całkowanie.** Szacowanie przez całkę. Szacujemy $H_n$.

**Wzór sumacyjny Eulera-McLaurina.** Idea, co małe, co duże, skąd to się bierze. Szacujemy $H_n$ jeszcze lepiej. Szacowanie $n!$.

**Wnioski: szacowanie $n!$, $1/n$ itd.** Wzór Stirlinga, itd. $(1 + \frac{1}{n})^n$.