Bajery

1. Wykaż, że pole 14-kąta wypukłego o wierzchołkach w punktach kratowych jest nie mniejsze niż 10.

2. Dana jest prosta $y = 0$. Rysujemy okręgi o środkach w punktach $(0, \frac{1}{2})$ i $(1, \frac{1}{2})$ i promieniach $\frac{1}{2}$. Następnie w każdym kolejnym kroku rysujemy wszystkie okręgi styczne zewnętrznie do dwóch sąsiednich okręgów i do prostej. Wykaż, że w ten sposób uzyskamy w każdej liczbie wymiernej z przedziału $[0, 1]$ okrąg styczny.

3. Wyznacz największą możliwą wartość wyrażenia

$$x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)}$$

dla $x, y \in [-1, 1]$.

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c, $a > c, b > c$, zachodzi nierówność

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \leqslant \sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)(1+\frac{c}{b}\Big)} + \sqrt{\left(1-\frac{c}{a}\right)(1-\frac{c}{b}\Big)} \leqslant 2.$$

5. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $x, y, z \in \mathbb{R}$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2y + 2x \\ z = y^2z + 2y \\ x = z^2x + 2z. \end{cases}$$

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ układu równań:

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n. \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

7. Wykaż, że dla $\alpha_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1-\cos\alpha_i} \geqslant \sqrt{1 - cos\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\Big)}$.

8. Znajdź najmniejszą wartość wyrażenia $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2 + (2i-1)^2}$ dla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} = n$.

9. Rozstrzygnij, czy w zbiorze liczb postaci $2x^2 + 10x + 13$, gdzie $x \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych.

10. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójkątów prostokątnych o bokach całkowitych takich, że długości przyprostokątnych przystają do 1002 i 1003 modulo 2004.