....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na V Warsztaty Matematyczne

Klasa druga i trzecia

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Liczba $2004^{2004} - 2451^{134}$

☐ jest podzielna przez 5.
☐ jest podzielna przez 7.
☐ jest podzielna przez 9.

2*. Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC. Na półprostych AB i AC zaznaczono punkty D i E odpowiednio, takie, że $|AD| = |AE|$ oraz odcinki DE i BC przecinają się w punkcie P, który jest środkiem odcinka BC. Wówczas:

☐ punkt P jest też środkiem odcinka DE.
☐ kąt PDB może być prosty.
☐ trójkąty PBA i PCA mają równe pola.

3. Aby podzielić tabliczkę czekolady na pojedyncze kostki, wystarczy nie więcej niż 32 łamań, jeśli tabliczka ma wymiary:

☐ 5×7.
☐ 4×8.
☐ 3×11.

4. Dziesięć kulek o promieniu 1 zmieści się w prostopadłościennym pudełku o wymiarach

☐ $6 \times 6 \times 3,5$.
☐ $6 \times 7,5 \times 2$.
☐ $4 \times 4 \times 6,5$.

5. Ślimak wchodzi na słup telegraficzny o wysokości 399cm. Rusza o świcie dnia pierwszego, musi dotrzeć na szczyt najpóźniej jedenastego dnia. W ciągu dnia wchodzi o x centymetrów, zaś w nocy śpi i zsuwa się o y centymetrów. Uda mu się, jeśli

☐ $x = 80$, $y = 40$.
☐ $x = 110$, $y = 80$.
☐ $x = 40$, $y = 4$.

6*. Trójmian kwadratowy $P(x)$ spełnia warunki: $P(-1) = 3$, $P(0) = -5$, $P(1) = 7$. Wówczas

☐ suma współczynników wielomianu $(P(x))^2$ jest mniejsza niż 50.
☐ wyraz wolny trójmianu $P(x)$ jest dodatni.
☐ współczynnik przy x^2 wynosi 10.

7. Murzynek Bambo mieszka pod Libreville (stolica Gabonu, na równiku, 10° długości wschodniej), Arab Alladyn mieszka w wiosce na pustyni (30° szerokości północnej, 10° długości wschodniej), a Norweg Hagar mieszka pod Oslo (60° szerokości północnej, 10° długości wschodniej). Wszyscy trzej kupili sobie identyczne poduszkowce i umówili się, że w tym samym momencie ruszą nimi na wschód, podróżując z tą samą prędkością.

☐ W czasie jak Hagar zrobi siedem kółek wokół Ziemi, Alladyn zdąży już być na piątym okrążeniu.

☐ Nastąpi moment, w którym znów wszyscy będą na jednym południku.

☐ Gdy Bambo po raz pierszy wróci do swojego domu, Hagar będzie miał za sobą pełne dwa kółka.

8. Onufry stoi w punkcie kratowym. W każdej minucie porusza się o metr w losowym kierunku: północ, południe, wschód, zachód, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ każdy. p_n oznacza prawdopodobieństwo, że po n minutach Onufry znajdzie się w punkcie wyjścia. Wówczas

☐ $p_2 = \frac{1}{4}$.
☐ $p_5 > \frac{1}{541}$.
☐ $p_4 > \frac{1}{8}$.

9. Kwadrat $KLMN$ jest zawarty całkowicie wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym czworokąty $ABLK$, $BCML$, $CDNM$, $DAKN$ są poprawnymi czworokątami. Suma pól czworokątów $BCML$ i $DAKN$ jest równa sumie pól czworokątów $ABLK$ i $CDNM$

☐ jeśli środki kwadratów $ABCD$ i $KLMN$ się pokrywają.
☐ wtedy i tylko wtedy, jeśli środek kwadratu $KLMN$ leży na przekątnej kwadratu $ABCD$.
☐ zawsze.

10*. W Księstwie Hofmańskim jest 541 miast, oraz pomiędzy niektórymi z nich są drogi jednokierunkowe. Na skutek dekretu Jaśnie Nam Panującego Hofmana, z każdego miasta wychodzi tyle samo dróg co do niego wchodzi.

☐ Książe Hofman może objechać wszystkie drogi w księstwie, każdą przejeżdżając dokładnie raz.
☐ Jeśli Książe Hofman może dojechać ze stolicy do każdego miasta, to z każdego miasta może wrócić do stolicy.
☐ Każde miasto płaci podatek - 2 denary od każdej drogi, która ma w nim początek lub koniec. Wpływy kasy księstwa z racji tego podatku mogą wynosić 31242 denary.

11. Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest nieparzysta. Wówczas

☐ funkcja $h(x) = g(f(x))$ jest nieparzysta.
☐ jeśli funkcja $i(x) = f(g(x^2))$ jest nieparzysta, to jest wielomianem.
☐ funkcja $j(x) = f(x)g(x^4)$ jest nieparzysta.

12. Ustawiamy figury szachowe na szachownicy tak, aby się nie biły. Można umieścić tak 8 figur, jeśli szachownica ma kształt

☐ prostokąta 7×9, a ustawiamy wieże.
☐ kwadratu 8×8 z wyciętymi w rogach kwadratami 2×2, a ustawiamy wieże.
☐ wszystkich czarnych pól szachownicy 8×8, a ustawiamy hetmany.

13. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ taki, że $|FA| = |FC| = |FE|$ oraz $|\measuredangle CDE| = |\measuredangle EAC| = 90°$.

- [ ] $|\measuredangle FCA| = |\measuredangle ADE|$.
- [ ] $|\measuredangle CEA| + |\measuredangle CDA| = |\measuredangle CFA|$.
- [ ] Punkty D, F, A muszą być współliniowe.

14*. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x+2) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas

- [ ] dla każdego $x < 0$ zachodzi $f(x-3) = f(x+7)$.
- [ ] możliwe jest, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x) = f(x + \frac{324}{541})$ i f nie jest funkcją stałą.
- [ ] jeśli dla każdego $x > 0$ istnieje $y > 0$, $y < x$, że dla każdego $z \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(z+y) = f(z)$, to funkcja f jest stała.

15. W sali jest 42 polityków, 17 kłamców i 25 złodziei, przy czym wiadomo, że jest 7 polityków, którzy jednoczeście kłamią i kradną.

- [ ] Jest co najmniej siedmiu uczciwych polityków (nie kłamią i nie kradną).
- [ ] Jest co najwyżej dziesięciu kłamliwych złodziei.
- [ ] Na sali może być 49 osób.

16. Ulubioną zabawą z liczbami Joasi jest *sumowanka*. Aby zabawić się w *sumowankę* należy wziąć jakąs liczbę całkowitą dodatnią. Następnie zsumować jej cyfry, a następnie zsumować cyfry otrzymanej sumy, itd., aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Ta liczba jest wynikiem *sumowanki.*

- [ ] Dla każdej liczby całkowitej dodatniej *sumowanka* kiedyś się skończy.
- [ ] Wynikiem *sumowanki* dla liczby 46764423342557623 jest 1.
- [ ] Wynikiem *sumowanki* dla 2004^{2004} jest 8.

17. Głównymi miastami Księstwa Hofmańskiego są: stolica Hofmandria oraz Hofmanogród, Hofenburg i Hofengard. Odległości wynoszą odpowiednio: Hofmandria - Hofmanogród: 60 km, Hofmanogród - Hofenburg: 45km, Hofmanogród - Hofengard: 108km, Hofengard - Hofenburg: 117km, Hofengard - Hofmandria: 48km. Wówczas odległość między Hofmandrią a Hofenburgiem:

- [ ] może być mniejsza niż 70km.

☐ wynosi dokładnie 75km.
☐ musi być większa niż 73km.

18. Suma $\sum_{i=1}^{n} i^5$ jest równa

☐ $\frac{1}{6}(n+1)^6 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{12}(n+1)^2$.
☐ $-120 + 294n - \frac{1083}{4}n^2 + \frac{245}{2}n^3 - \frac{115}{4}n^4 + 4n^5$.
☐ $\sum_{i=2n}^{3n}(i-2n)^5$.

19. Onufry i Joasia grają w grę. Plansza jest paskiem długości $n \in \mathbb{N}$ ($n > 2004$) i szerokości 1, podzielonym na n jednostkowych kratek. Mają do dyspozycji dowolną liczbę pasków o długościach $k \in \mathbb{N}$ i $l \in \mathbb{N}$ i szerokościach 1, przy czym $k + l = 99$. Ruch polega na położenia jednego dostępnego paska na planszy, tak, by pokrywał tylko całe kratki i nie pokrywał się z wcześniej położonym paskiem. Joasia rozpoczyna, a przegrywa ten, kto nie może położyć już paska. Jeśli Onufry gra optymalnie, to

☐ Joasia zawsze może wygrać.
☐ Joasia może wygrać wtedy i tylko wtedy gdy n jest parzyste.
☐ Joasia może wygrać, jeśli n jest pierwsze.

20*. W pewnym państwie jest n miast. Pomiędzy niektórymi z nich są drogi, przy czym dla dowolnie wybranych trzech miast istnieje dokładnie jedna lub dokładnie dwie z trzech możliwych łączących je dróg. Jest możliwe, aby

☐ $n = 4$.
☐ $n = 5$.
☐ $n = 6$.

21. Joasia uwielbia robić super-pierogi. Aby zrobić super-pieroga Joasia potrzebuje kilogram ciasta, aczkolwiek po skończeniu pieroga zostaje jej 200 gramów ciasta, które może dalej wykorzystać. Joasia ma 541 kilogramów ciasta, zaś Onufry jest syty, gdy zje dwa pierogi. Joasia jest w stanie nakarmić

☐ 334 Onufrych.
☐ 336 Onufrych.
☐ 338 Onufrych.

22. Równanie $69x + 51y = C$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y, jeśli

- [ ] $C = 2317$.
- [ ] $C = 291$.
- [ ] $C = 1053$.

23*. Czy na szachownicy 8×8 można położyć, by się nie biły:

- [ ] 33 skoczki?
- [ ] 4 wieże i 4 gońce?
- [ ] 8 hetmanów i skoczek?

24. Ze zwykłego zegarka wskazówkowego zmazano wszystkie oznaczenia godzin i zostały tylko wskazówki. Zegar leży w poziomie na ziemi. Joasia patrzy na zegarek przez bardzo długo i zaznacza miejsca, w których możliwe jest, że wcześniej była godzina dwunasta (tj. wskazówki się pokryły). Miejsc tych jest:

- [ ] 6.
- [ ] 12.
- [ ] nieskończenie wiele.

25. Onufry układa pasjansa. Ma 32 karty (od siódemek w górę), dobrze potasowane. Kładzie po kolei karty na stół. Jeśli położył kartę tego samego koloru karcianego, co ostatnia leżąca na stole (jeśli jest), i wyższą, to zdejmuje obie karty. Wartość oczekiwana liczby zdjętych kart

- [ ] wynosi dokładnie 7.
- [ ] jest większa niż 3,5.
- [ ] jest liczbą niewymierną.

26. Spośród wszystkich funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest jedyną funkcją dla której dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

- [ ] $f(x) + f(y+1) = f(x+y) + 1 + f(0)$.
- [ ] $xyf(x)f(y) = f(x^2)f(y^2)$.
- [ ] $f(x+y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$.

27. Przecinając płaszczyzną ośmiościan foremny można otrzymać w przekroju

☐ kwadrat.
☐ romb nie będący kwadratem.
☐ sześciokąt foremny.

28. Wielomian $x^3 - 17x^2 + Bx + 1001$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, w tym dwa całkowite.

☐ Trzeci pierwiastek musi być całkowity.
☐ Istnieje całkowity pierwiastek podzielny przez 13.
☐ Wszystkie trzy pierwiastki muszą być wymierne.

29. Równanie $(a + b\sqrt{3})^4 = 5 + 3\sqrt{3}$ ma rozwiązanie w liczbach a, b

☐ całkowitych.
☐ wymiernych.
☐ rzeczywistych.

30*. Muzeum ma kształt n-kąta, którego pilnuje k strażników. Strażnik widzi wszystko wokół niego, ale nie może patrzeć przez ściany (ale widzi wzdłuż ściany - same punkty ściany i wierzchołki muzeum są jeszcze przeźroczyste). Muzeum jest upilnowane, jeśli każdy punkt muzeum jest widziany przez przynajmniej jednego strażnika.

☐ Jeśli $n = 901$, to możemy potrzebować aż 300 strażników, by upilnować muzeum.
☐ Jeśli $n = 2004$, to istnieje muzeum, gdzie potrzeba dokładnie dwóch strażników, by je upilnować.
☐ Dla $n = 2004$ na pewno wystarczy 2004 strażników do upilnowania muzeum.