....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na V Warsztaty Matematyczne

Klasa pierwsza

Na pytania odpowiada się „tak" lub „nie" poprzez wpisanie odpowiednio „**T**" bądź „**N**" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak" i „nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Liczba $2004^{2004} - 2451^{134}$

☐ jest podzielna przez 5.
☐ jest podzielna przez 7.
☐ jest podzielna przez 9.

2*. Dany jest trójkąt nierównoramienny ABC. Na półprostych AB i AC zaznaczono punkty D i E odpowiednio, takie, że $|AD| = |AE|$ oraz odcinki DE i BC przecinają się w punkcie P, który jest środkiem odcinka BC. Wówczas:

☐ punkt P jest też środkiem odcinka DE.
☐ kąt PDB może być prosty.
☐ trójkąty PBA i PCA mają równe pola.

3. Aby podzielić tabliczkę czekolady na pojedyncze kostki, wystarczą 32 łamania, jeśli tabliczka ma wymiary:

- [ ] 5×7.
- [ ] 4×8.
- [ ] 3×11.

4. Dziesięć kulek o promieniu 1 zmieści się w prostopadłościennym pudełku o wymiarach

- [ ] $6 \times 6 \times 3,5$.
- [ ] $6 \times 7,5 \times 2$.
- [ ] $4 \times 4 \times 6,5$.

5. Ślimak wchodzi na czterometrowy słup telegraficzny. Rusza o świcie dnia pierwszego, musi dotrzeć na szczyt najpóźniej jedenastego dnia. W ciągu dnia wchodzi o x centymetrów, zaś w nocy śpi i zsuwa się o y centymetrów. Uda mu się, jeśli

- [ ] $x = 80$, $y = 40$.
- [ ] $x = 110$, $y = 80$.
- [ ] $x = 40$, $y = 4$.

6. Kwadrat $KLMN$ jest zawarty całkowicie wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym czworokąty $ABLK$, $BCML$, $CDNM$, $DAKN$ są poprawnymi czworokątami. Suma pól czworokątów $BCML$ i $DAKN$ jest równa sumie pól czworokątów $ABLK$ i $CDNM$

- [ ] jeśli środki kwadratów $ABCD$ i $KLMN$ się pokrywają.
- [ ] wtedy i tylko wtedy, jeśli środek kwadratu $KLMN$ leży na przekątnej kwadratu $ABCD$.
- [ ] zawsze.

7. W Księstwie Hofmańskim jest 541 miast, oraz pomiędzy niektórymi z nich są drogi jednokierunkowe. Na skutek dekretu Jaśnie Nam Panującego Hofmana, z każdego miasta wychodzi tyle samo dróg co do niego wchodzi.

- [ ] Książe Hofman może objechać wszystkie drogi w księstwie, każdą przejeżdżając dokładnie raz.
- [ ] Jeśli Książe Hofman może dojechać ze stolicy do każdego miasta, to z każdego miasta może wrócić do stolicy.
- [ ] Każde miasto płaci podatek - 2 denary od każdej drogi, która ma w nim początek lub koniec. Wpływy kasy księstwa z racji tego podatku mogą wynosić 31242 denary.

8. Dane są funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest nieparzysta. Wówczas

- [ ] funkcja $h(x) = g(f(x))$ jest nieparzysta.
- [ ] jeśli funkcja $i(x) = f(g(x^2))$ jest nieparzysta, to jest stała.
- [ ] funkcja $j(x) = f(x)g(x^4)$ jest nieparzysta.

9. Ustawiamy figury szachowe na szachownicy tak, aby się nie biły. Można umieścić tak 8 figur, jeśli szachownica ma kształt

- [ ] prostokąta 7×9, a ustawiamy wieże.
- [ ] kwadratu 8×8 z wyciętymi w rogach kwadratami 2×2, a ustawiamy wieże.
- [ ] wszystkich czarnych pól szachownicy 8×8, a ustawiamy hetmany.

10. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$ taki, że $|FA| = |FC| = |FE|$ oraz $|\measuredangle CDE| = |\measuredangle EAC| = 90°$.

☐ $|\measuredangle FCA| = |\measuredangle ADE|$.
☐ $|\measuredangle CEA| + |\measuredangle CDA| = |\measuredangle CFA|$.
☐ Punkty D, F, A muszą być współliniowe.

11. W sali jest 42 polityków, 17 kłamców i 25 złodziei, przy czym wiadomo, że jest 7 polityków, którzy jednoczeście kłamią i kradną.

☐ Jest co najmniej siedmiu uczciwych polityków (nie kłamią i nie kradną).
☐ Jest co najwyżej dziesięciu kłamliwych złodziei.
☐ Na sali może być 49 osób.

12. Ulubioną zabawą z liczbami Joasi jest *sumowanka*. Aby zabawić się w *sumowankę* należy wziąć jakąs liczbę całkowitą dodatnią. Następnie zsumować jej cyfry, a następnie zsumować cyfry otrzymanej sumy, itd., aż otrzymamy liczbę jednocyfrową. Ta liczba jest wynikiem *sumowanki*.

☐ Dla każdej liczby całkowitej dodatniej *sumowanka* kiedyś się skończy.
☐ Wynikiem *sumowanki* dla liczby 46764423342557623 jest 1.
☐ Wynikiem *sumowanki* dla 2004^{2004} jest 8.

13. Głównymi miastami Księstwa Hofmańskiego są: stolica Hofmandria oraz Hofmanogród, Hofenburg i Hofengard. Odległości wynoszą odpowiednio: Hofmandria - Hofmanogród: 60 km, Hofmanogród - Hofenburg: 45km, Hofmanogród - Hofengard: 108km, Hofengard - Hofenburg: 117km, Hofengard - Hofmandria: 48km. Wówczas odległość między Hofmandrią a Hofenburgiem:

☐ może być mniejsza niż 70km.
☐ wynosi dokładnie 75km.
☐ musi być większa niż 73km.

14*. W pewnym państwie jest n miast. Pomiędzy niektórymi z nich są drogi, przy czym dla dowolnie wybranych trzech miast istnieje dokładnie jedna lub dokładnie dwie z trzech możliwych łączących je dróg. Jest możliwe, aby

☐ $n = 4$.
☐ $n = 5$.
☐ $n = 6$.

15*. Joasia uwielbia robić super-pierogi. Aby zrobić super-pieroga Joasia potrzebuje kilogram ciasta, aczkolwiek po skończeniu pieroga zostaje jej 200 gramów ciasta, które może dalej wykorzystać. Joasia ma 541 kilogramów ciasta, zaś Onufry jest syty, gdy zje dwa pierogi. Joasia jest w stanie nakarmić

- ☐ 334 Onufrych.
- ☐ 336 Onufrych.
- ☐ 338 Onufrych.

16. Przecinając sześcian płaszczyzną można otrzymać

- ☐ trójkąt rozwartokątny.
- ☐ pięciokąt foremny.
- ☐ sześciokąt foremny.

17. Ze zwykłego zegarka wskazówkowego zmazano wszystkie oznaczenia godzin i zostały tylko wskazówki. Zegar leży w poziomie na ziemi. Joasia patrzy na zegarek przez bardzo długo i zaznacza miejsca, w których możliwe jest, że wcześniej była godzina dwunasta (tj. wskazówki się pokryły). Miejsc tych jest:

- ☐ 6.
- ☐ 12.
- ☐ nieskończenie wiele.

18. Suma czterech kolejnych liczb całkowitych

- ☐ może być kwadratem liczby całkowitej.
- ☐ musi być kwadratem liczby rzeczywistej.
- ☐ może być podzielna przez 7.

19. Spośród wszystkich funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest jedyną funkcją dla której dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

- ☐ $f(x) + f(y + 1) = f(x + y) + 1 + f(0)$.
- ☐ $xyf(x)f(y) = f(x^2)f(y^2)$.
- ☐ $f(x + y)f(x^2 - xy + y^2) = x^3 - y^3$.

20*. Czy na szachownicy 8×8 można położyć, by się nie biły:

☐ 33 skoczki?
☐ 4 wieże i 4 gońce?
☐ 8 hetmanów i skoczek?

21. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC obrano punkt P, zaś na boku BC punkt D. Okrąg opisany na trójkącie BPD przecina bok AB w punkcie F, zaś okrąg opisany na trójkącie CPD przecina bok AC w punkcie E.

☐ Punkty B, P i E są współliniowe.
☐ Punkt C jest spodkiem wysokości trójkąta ABC.
☐ Na czworokącie $AEPF$ da się opisać okrąg.

22*. Iloczyn trzech kolejnych liczb nieparzystych

☐ musi być liczbą pierwszą.
☐ może być liczbą pierwszą.
☐ musi być podzielny przez 3.

23. $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą. Wówczas

- ☐ $x + \frac{1}{x}$ musi być liczbą całkowitą.
- ☐ $x^6 + \frac{1}{x^6}$ musi być liczbą całkowitą.
- ☐ $x^2 + \frac{1}{x^2} > \frac{\pi}{2}$.

24. Czy istnieje koło, gdzie wymiernymi są

- ☐ obwód i długość promienia.
- ☐ obwód i pole.
- ☐ pole.

25*. Ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg spełniający warunki: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ dla każdego n całkowitego dodatniego.

- ☐ Istnieje wyraz ciągu Fibonacciego podzielny przez 7.
- ☐ Dla każdego $n > 1$ zachodzi $F_1 + F_2 + \ldots F_n = F_{n+2} - 2$.
- ☐ Istnieje wyraz ciągu Fibonacciego będący kwadratem liczby całkowitej.

26. Sfera może mieć z krawędziami czworościanu foremnego

- ☐ 4 punkty wspólne.
- ☐ 5 punktów wspólnych.
- ☐ 12 punktów wspólnych.

27. n różnymi prostymi można podzielić płaszczyznę na dokładnie

- ☐ 2^n części.
- ☐ $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ cześci.
- ☐ n części.

28. Czy istnieje trójkąt prostokątny o bokach, których długości są

- ☐ liczbami nieparzystymi.
- ☐ kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.
- ☐ całkowite i są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

29*. Muzeum ma kształt n-kąta, którego pilnuje k strażników. Strażnik widzi wszystko wokół niego, ale nie może patrzeć przez ściany (ale widzi wzdłuż ściany - same punkty ściany i wierzchołki muzeum są jeszcze przeźroczyste). Muzeum jest upilnowane, jeśli każdy punkt muzeum jest widziany przez przynajmniej jednego strażnika.

☐ Jeśli $n = 901$, to możemy potrzebować aż 300 strażników, by upilnować muzeum.
☐ Jeśli $n = 2004$, to istnieje muzeum, gdzie potrzeba dokładnie dwóch strażników, by je upilnować.
☐ Dla $n = 2004$ na pewno wystarczy 2004 strażników do upilnowania muzeum.

30. Na ulicy Szkolnej są po kolei ustawione cztery budynki z numerami kolejno $1, 2, 3, 4$. Mieszka tam czwórka przyjaciół: Marysia, Albercik, Piotruś i Karolek (po jednym w każdym domu, oczywiście). Każdy z nich lubi jeden z przedmiotów w szkole: WOS, język polski, język hiszpański i przedsiębiorczość (każdy lubi inny). Każdy z nich maniakalnie gra również w jedną z gier komputerowych: AvP, The Sims, Król Lew i Wolf3D (każdy w inną). Przy tym wiadomo, że:

1. Osoba mieszkająca w budynku numer 2 lubi język polski.

2. Albercik jest sąsiadem Marysi.

3. Piotruś mieszka na skraju ulicy (czyli w 1 lub 4).

4. Osoba grająca w AvP nie mieszka obok osoby grającej w The Sims.

5. Zarówno osoba lubiąca hiszpański jak i ta lubiąca WOS nie gra w The Sims.

6. Osoba grająca w Wolf3D mieszka pod numerem 4.

7. Piotruś nie lubi hiszpańskiego.

8. Marysia nie lubi języka polskiego.

9. Albercik lubi przedsiębiorczość.

Wówczas:

☐ Piotruś mieszka pod numerem 4.
☐ Piotruś gra w The Sims.
☐ Marysia lubi język hiszpański.