Pięciogodzinówka, dzień czwarty

luty 2005

10. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $f(f(n)) = n + 1$.

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego nierównoramiennego ABC. Punkty E i F są odpowiednio rzutami punktu D na odcinki AB i AC. Proste EF i BC przecinają się w punkcie K. Punkt L jest punktem środkowosymetrycznym do A względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $DL \perp AK$.

12. Podziałem zbioru nazywamy dowolny zbiór jego parami rozłącznych podzbiorów, sumujących się do całego zbioru. Dla dowolnego podziału p przez $p(x)$ oznaczamy liczbę elementów tego elementu podziału, do którego należy x. Pokazać, że dla dowolnych podziałów p i q zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$ istnieją takie x i y, że $p(x) = p(y)$ i $q(x) = q(y)$.