Pięciogodzinówka, dzień czwarty

luty 2005

10. Rozstrzygnąć, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $f(f(n)) = n + 1$.

Rozwiązanie.
Nie istnieje taka funkcja.
Wykażemy to zadania nie wprost. Przypuśćmy, że istnieje taka funkcja f.
Niech $f(1) = k$. Wtedy $f(l + 1) = l + k$. Można to wykazać indukcyjnie. Dla $n = 0$ zachodzi. Niech $f(n + 1) = n + k$, wykaże, że $f(n + 2) = n + k + 1$. Mamy $f(n + 2) = f(f(f(n + 1))) = f(f(n + k)) = n + k + 1$. Stosujemy więc lemat do $n = k - 1$ i mamy, że $f(k) = f(1 + k - 1) = k + k - 1 = 2k - 1$. Jednocześnie $f(k) = f(f(1)) = 2$. A zatem musi być $2k - 1 = 2$, co prowadzi do sprzności z założeniem, że $k \in \mathbb{Z}^+$. ■

11. Odcinek AD jest wysokością trójkąta ostrokątnego nierównoramiennego ABC. Punkty E i F są odpowiednio rzutami punktu D na odcinki AB i AC. Proste EF i BC przecinają się w punkcie K. Punkt L jest punktem środkowosymetrycznym do A względem środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że $DL \perp AK$.

Rozwiązanie.
Zauważmy, iż na czworokącie $AEDF$ da się opisać okrąg i AD jest jego średnicą, jest on styczny do prostej BC. Okręgi o średnicach BD i CD są styczne do prostej AD i do siebie. Wobec tego, z potęgi punktu A względem nich wynika $AE \cdot AB = AD^2 = AF \cdot AC$, wobec tego na czworokącie $BCFE$ da się opisać okrąg. Niech M będzie drugim przecięciem okręgu o średnicy AD z prostą AK. Z potęgi punktu K względem obu ostatnich okręgów mamy $KM \cdot KA = KE \cdot KF = KB \cdot KC$, więc na czworokącie $AMBC$ da się opisać okrąg i jest to okrąg opisany na trójkącie ABC. Skoro M należał do okręgu o średnicy AD, to $\measuredangle AMD = \frac{\pi}{2}$. Przedłużmy prostą MD do przecięcia z okręgiem opisanym na ABC, niech to będzie punkt N. Skoro kąt AMD był prosty, to AN jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC, czyli $N = E$. Ale $DM \perp AK$, co należało dowieść. ■

12. Podziałem zbioru nazywamy dowolny zbiór jego parami rozłącznych podzbiorów, sumujących się do całego zbioru. Dla dowolnego podziału p przez $p(x)$ oznaczamy liczbę elementów tego elementu podziału, do którego należy x. Pokazać, że dla dowolnych podziałów p i q zbioru $\{1, 2, \ldots, 9\}$ istnieją takie x i y, że $p(x) = p(y)$ i $q(x) = q(y)$.

Rozwiązanie.
Zauważmy, iż relacja $p(x) = p(y)$ jest relacją równoważności na $\{1, 2, \ldots, 9\}$ i wyznacza jakiś podział tego zbioru p', analogicznie q'. Podział p' składa się z maksymalnie trzech podzbiorów, bo w podziale p mogły istnieć co najwyżej trzy różne liczności zbiorów, bo jeśli istniały cztery $a < b < c < d$, to $a + b + c + d \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9$, sprzeczność. Czyli p' i q' to podziały $\{1, 2, \ldots, 9\}$ na co najwyżej trzy zbiory. Skupmy się na podzbiorze mocy 3 w p', jeśli taki istnieje. Mógł on powstać z jednego zbioru mocy 3 w p lub z trzech mocy 1, są tylko dwie możliwości. Czyli podział p' nie może się składać z trzech trzyelementowych zbiorów (bo każdy zbiór odpowiada jednej wartości $p(x)$). Czyli istnieje w nim zbiór przynajmniej czteroelementowy. Czyli dwa elementy z niego należą do tego samego zbioru w q', bo q' też ma co najwyżej trzy zbiory. Czyli te dwa elementy leżą w tych samych klasach abstrakcji w obu podziałach p' i q', c.k.d. ■