Pięciogodzinówka, dzień trzeci

luty 2005

7. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą zaś $m = \frac{4^p-1}{3}$. Wykazać, że $2^{m-1} \equiv 1 \mod m$.

8. Punkty A, P, Q, R i S leżą na okręgu w tej właśnie kolejności, przy czym

$$\measuredangle PAQ = \measuredangle QAR = \measuredangle RAS.$$

Wykazać, że

$$AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS).$$

9. Wykazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zachodzi

$$\frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{xyz}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{xyz}{z^3 + x^3 + xyz} \leqslant 1.$$