Pięciogodzinówka, dzień trzeci

luty 2005

7. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą zaś $m = \frac{4^p-1}{3}$. Wykazać, że $2^{m-1} \equiv 1 \mod m$.

Rozwiązanie.
Z małego twierdzenia Fermata mamy $4^p \equiv 4 \mod p$, $p > 3$, więc $m \equiv 1 \mod p$. W dodatku m jest nieparzyste, więc dla pewnego $k \in \mathbb{Z}^+$ zachodzi $m - 1 = 2kp$. W takim razie $2^{m-1} = (4^p)^k = (3m+1)^k \equiv 1 \mod m$. ∎

8. Punkty A, P, Q, R i S leżą na okręgu w tej właśnie kolejności, przy czym

$$\measuredangle PAQ = \measuredangle QAR = \measuredangle RAS.$$

Wykazać, że

$$AR(AP + AR) = AQ(AQ + AS).$$

Rozwiązanie.
Zauważmy, iż $PQ = QR = RS$, bo odpowiednie łuki PQ, QR i RS są równe. W dodatku $\measuredangle APQ + \measuredangle AQR = \pi$ i $\measuredangle ASR + \measuredangle ARQ = \pi$, wobec tego na półprostych AQ i AR istnieją odpowiednio punkty X i Y, że $\triangle APQ \equiv \triangle XQR$ i $\triangle ASR \equiv \triangle QRY$, przy czym punkt Q należy do odcinka AX i punkt R należy do odcinka AY. Skoro zaś $\measuredangle PAQ = \measuredangle RAS$, to $\measuredangle QXR = \measuredangle QYR$, więc na czworokącie $QRYX$ da się opisać okrąg. Wobec tego, z potęgi punktu A mamy

$$AX \cdot AQ = AR \cdot AY,$$

co, z przystawania odpowiednich trójkątów, jest równoważne tezie. ∎

9. Wykazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zachodzi

$$\frac{xyz}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{xyz}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{xyz}{z^3 + x^3 + xyz} \leqslant 1.$$

Rozwiązanie.
Możemy założyć, że $xyz = 1$, wszystkie wyrażenia są tego samego stopnia (3), więc bez straty ogólnośći możemy to przeskalować.
Dostajemy więc do wykazania

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1} \leqslant 1.$$

Podstawiamy $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, skoro $xyz = 1$, bo również $abc = 1$. Musimy więc wykazać, że

$$\frac{1}{a + b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} + \frac{1}{c + a + 1} \leqslant 1.$$

Przemnażamy obie strony nierówności przez iloczyn mianowników (jest on dodatni), czyli przez $(a+b+1) \cdot (b+c+1) \cdot (c+a+1)$. Dostajemy do wykazania $(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+3 \leqslant 2abc+(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)+3(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)+1$, co po skróceniu sprowadza się do

$$2(a + b + c) \leqslant (a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2).$$

Jak widać dostaliśmy niewygodną, bo niejednorodną nierówność. Przypominamy sobie, że $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. A zatem należy wykazać, że:

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \leqslant (x^6y^3 + x^3y^6 + y^6z^3 + y^3z^6 + z^6x^3 + z^3x^6).$$

Wykorzystując fakt, że $xyz = 1$ normujemy nierówność i przemnażamy prawą stronę przez $(xyz)^2$. Otrzymujemy nierówność:

$$2(x^5yz + y^5zx + z^5xy) \leqslant (x^6y^3 + x^3y^6 + y^6z^3 + y^3z^6 + z^6x^3 + z^3x^6).$$

Jest to nierówność Muirheada dla ciągów $(6, 3, 0)$ oraz $(5, 2, 2)$. $\blacksquare$