Pięciogodzinówka, dzień drugi, rozwiązania zadań

luty 2005

4. Rozstrzygnij, czy szachownice 6×6 da się pokryć kostkami domina 2×1, tak, aby każda z 10 linii dzielących kratki szachownicy była przecięta przez co najmniej jedno domino.

Rozwiązanie.
Nie, nie da się. Zauważmy, iż każda linia dzieląca dzieli szachownicę na dwa kawałki o parzystym polu. W związku z tym przecinać ją musi parzyście wiele domin, czyli przynajmniej 2 domina. Ale jest tylko 18 domin, a 10 linii. ■

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{Q}$ równość

$$f(x + f(y)) = f(x) + y.$$

Rozwiązanie.

$$(x = 0) \Rightarrow f(f(x)) = f(0) + x.$$

$$f(x) + y = f(x + f(y)) = f(f(y + f(x))) = y + f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

oraz mamy, z pierwszego, $f(f(x)) = x$.
Pokażę teraz, że $f(nf(k)) = nk$ dla $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Q}$. Zrobię to przez indukcję.
Dla $n = 1$ zgadza się, gdyż $f(f(k)) = k$.
Przypuśćmy, że dla $n - 1$ jest ok.

$x = nf(k), y = k \Rightarrow f(nf(k)) = f((n-1)f(k)+f(k)) = f((n-1)f(k))+k = (n-1)k+k = nk$
Zauważmy, że f jest różnowartościowa, gdyż gdyby $f(a) = f(b)$, to wtedy

$$a = f(f(a)) = f(f(b)) = b.$$

Mamy zatem

$$f(af(b)) = ab = f(f(ab)) \Rightarrow af(b) = f(ab).$$

A więc

$$f(\frac{p}{q}) = f(p) \cdot \frac{1}{q} = f(1) \cdot p \cdot \frac{1}{q} = f(1)\frac{p}{q} \Rightarrow f(x) = xf(1).$$

Podstawmy więc do głownego równania, to może wyjdzie, jakie powinno być $f(1)$. Mamy:

$$(x + yf(1))f(1) = xf(1) + y \Rightarrow f(1)^2 \cdot y = y \Rightarrow f(1)^2 = 1.$$

Musi być więc $f(1) = 1$ lub $f(1) = -1$. Sprawdzamy, że funkcje $f(x) = x$ oraz $f(x) = -x$ spełniają warunki zadania, więc są to jedyne funkcje. ■

6. Punkty D, E i F są dowolnymi punktami leżącymi na odpowienio symetralnych boków BC, AC i AB trójkąta ABC. Proste k, l, m są prostymi przechodzącymi przez odpowiednio wierzchołki A, B i C oraz prostopadłymi do odpowiednio prostych EF, DF, DE. Wykazać, że proste k, l i m przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie.

Niech okrąg ω_D będzie okręgiem o środku w D i promieniu $DB = DC$ (D leży na symetralnej BC). Analogicznie definiujemy okręgi ω_E i ω_F. Okręgi ω_D i ω_E przecinają się w punkcie C, prosta DE jest prostą łącząca ich środki, wobec tego prosta m jest ich osią potęgową. Analogicznie prosta k jest osią potęgową okręgów ω_E i ω_F, zaś prosta l jest osią potęgową okręgów ω_D i ω_F. Ale osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie. $\blacksquare$