Pięciogodzinówka, dzień pierwszy

luty 2005

1. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby naturalne $a > b > 1$ takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której $an+b$ jest k-tą potegą pewnej liczby całkowitej dodatniej.

2. Punkt D jest takim punktem boku AB trójkąta ABC, że $3 \cdot AD = BD$. Punkt E jest takim punktem łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC, niezawierającym punktu B, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ACB$. Wykazać, że $2 \cdot DE = EB$.

3. W każde pole szachownicy 2005×2005 wpisana dostała liczba o module niewiększym niż 1. W każdym kwadracie 2×2 suma liczb wynosi 0. Wykazać, że w całym kwadracie suma liczb jest nie większa niż 2005.