Pięciogodzinówka, dzień pierwszy, rozwiązania zadań

luty 2005

1. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby naturalne $a > b > 1$ takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej k istnieje liczba całkowita dodatnia n, dla której $an+b$ jest k-tą potęgą pewnej liczby całkowitej dodatniej.

Rozwiązanie.
Istnieją. Niech $a = 6, b = 4$. Wtedy dla każdej liczby całkowitej dodatniej k zachodzi: k-ta potęga liczby 4 przystaje do 4 mod 6, czyli istnieje takie $n \in \mathbb{Z}^+$, że $4^k = 6n + 4$. ■

2. Punkt D jest takim punktem boku AB trójkąta ABC, że $3 \cdot AD = BD$. Punkt E jest takim punktem łuku AC okręgu opisanego na trójkącie ABC, niezawierającym punktu B, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ACB$. Wykazać, że $2 \cdot DE = EB$.

Rozwiązanie.
Z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku wynika, że $\measuredangle ACB = \measuredangle AEB$. W związku z tym trójkąty ADE i AEB są podobne, niech k oznacza ich skalę podobieństwa. Oczywiście $k = \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AB}$, więc $k^2 = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{4}$, czyli $k = \frac{1}{2}$. Na mocy podobienstwa otrzymujemy tezę: $\frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}$. ■

3. W każde pole szachownicy 2005×2005 wpisana dostała liczba o module niewiększym niż 1. W każdym kwadracie 2×2 suma liczb wynosi 0. Wykazać, że w całym kwadracie suma liczb jest nie większa niż 2005.

Rozwiązanie.
Wprowadźmy układ wspólrzędnych na szachownicy w następujący sposób: pole $(1, 1)$ to lewe dolne pole, $(2005, 1)$ to prawe dolne, $(2005, 2005)$ to prawe górne. Niech $L(i, j)$ będzie liczbą stojącą na polu (i, j).
Wiadomo, że suma liczb w kwadracie $(1 - 2004, 1 - 2004)$ jest równa 0, gdyż kwadrat ten możemy przykryć 1002^2 kwadratami 2×2. Zatem suma liczb w całym dużym kwadracie jest taka, jak na wąskim pasku składającym się z pól postaci $(2005, i)$ oraz $(i, 2005)$.
Zauważmy, *fakcik*:

$$L(i, j) + L(i, j + 1) = L(i + 2, j) + L(i + 2, j + 1),$$

gdyż obie te sumy są równe $-(L(i + 1, j) + L(i + 1, j + 1))$.
Pokażę, teraz, że dla $i \in \{1, 2, \ldots, 1002\}$ zachodzi:

$$L(2i - 1, 2005) + L(2i, 2005) + L(2005, 2i - 1) + L(2005, 2i) \leqslant 2.$$

Zauważmy, że z *fakciku* wynika, że

$$L(2i - 1, 2005) + L(2i, 2005) = L(2i - 1, 2i - 1) + L(2i, 2i - 1).$$

Analogicznie

$$L(2005, 2i - 1) + L(2005, 2i) = L(2i - 1, 2i - 1) + L(2i - 1, 2i).$$

Zatem

$$
\begin{gathered}
L(2i-1,2005)+L(2i,2005)+L(2005,2i-1)+L(2005,2i)= \\
=L(2i-1,2i-1)+L(2i,2i-1)+L(2i-1,2i-1)+L(2i-1,2i)= \\
=(L(2i-1,2i-1)+L(2i,2i-1)+L(2i,2i)+L(2i-1,2i))+(L(2i-1,2i-1)-L(2i,2i))= \\
=0+L(2i-1,2i-1)-L(2i,2i)\leqslant 2.
\end{gathered}
$$

Sumując 1002 takie nierówności oraz nierówność $L(2005,2005)\leqslant 1$ otrzymamy tezę zadania. ■