Wielomiany

Krótki skrót teorii

A. Wielomianem nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem: $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ dla pewnych liczb rzeczywistych $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Liczby a_i nazywamy **współczynnikami** wielomianu W, zaś n jest jego **stopniem**. Liczbę c taką, że $W(c) = 0$ nazywamy **pierwiastkiem** wielomianu W.

B. Twierdzenie Bezout. Liczba rzeczywista c jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy gdy wielomian W da się przedstawić w postaci $W(x) = (x - c)P(x)$ dla pewnego wielomianu P.

C. Wnioski z twierdzenia Bezout. Wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków. Jeśli wielomian W miał współczynniki całkowite i $c \in \mathbb{Z}$, to wielomian P także ma współczynniki całkowite.

D. Wzory Viete'a Jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ to zachodzą następujące równości:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots \\ x_1x_2x_3\ldots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

(w każdej sumie występuje $\binom{n}{i}$ składników, sumujemy wszystkie iloczyny i różnych pierwiastków).
W szczególności dla wielomianu $W(x) = ax^2 + bx + c$ zachodzi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

zaś dla wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ zachodzi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = - = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

E. Wielomian W jest wielomianem **całkowitoliczbowym** jeśli wszystkie jego współczynniki są liczbami całkowitymi. Wówczas jeśli $x \in \mathbb{Z}$ to $W(x) \in \mathbb{Z}$.

F. Jeśli $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest **wielomianem o współczynnikach całkowitych** i liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest jego pierwiastkiem, przy czym $p \perp q$, to $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$. Wniosek: jeśli $a_n = 1$ i $x \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu **całkowitoliczbowego** W, to $x \in \mathbb{Z}$.

G. Jeśli W jest **wielomianem o współczynnikach całkowitych** i $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, to $a - b \mid W(a) - W(b)$.

Zadania

1. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7x + 1$. Przedstaw ten wielomian jako sumę $W(x) = P(x)(x-2) + c$ dla pewnego wielomianu P i liczby całkowitej c.

2. Równania $ax^2 + bx + c$ oraz $dx^2 + ex + f$ mają te same dwa pierwiastki. Z tego wynika, że

☐ $a = d$.
☐ $ae = bd$.
☐ $c + f = 0$.

3. *(II etap LII OM)* Wielomian $W(x) = x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + \ldots + a_1x + a_0$ ma n pierwiastów rzeczywistych. Wykaż, że $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-3}$.

4. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych x, y, z układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$$

5. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x) = x^{20} - 20x^{19} + a_{18}x^{18} + a_{17}x^{17} + \ldots + a_1x^1 + 1$ wiedząc, że wszystkie one są dodatnie.

6. Znajdź pierwiastki wielomianu $W(x) = 2x^4 - x^3 - 14x^2 - 5x + 6$.

7. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $2 \mid W(5)$ i $5 \mid W(2)$. Wykaż, że $10 \mid W(7)$.

8. Czy istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych stopnia dodatniego taki, żeby dla pewnych różnych liczb całkowitych a, b i c zachodziło $W(a) = b$, $W(b) = c$ i $W(c) = a$?

9. Czy istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych stopnia dodatniego taki, żeby dla każdej liczy całkowitej dodatniej n liczba $W(n)$ była liczbą pierwszą?

10. Wielomian W o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 5 dla czterech różnych argumentów całkowitych. Udowodnij, że dla żadnego argumentu całkowitego nie przyjmuje on wartości 8.

11. *(Baltic Way'91)* Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że jeśli dla pewnego całkowitego n zachodzi $P(-n) < P(n) < n$, to $P(-n) < -n$.

12. *(finał LIV OM)* Czy istnieje wielomian W o współczynnikach całkowitych stopnia dodatniego taki, że dla każdego całkowitego dodatniego n zachodzi $W(n) \mid 2^n - 1$.