Parę zadań troszkę trudniejszych od pozostałych

1. Na szachownicy $n \times n$ szerzy się epidemia. Na początku zarażone jest k pól - ognisk epidemii. Jeżeli co najmniej dwóch z czterech sąsiadów niezarażonego pola jest zarażonych, to ono również staje się zarażone. Znaleźć najmniejsze k takie, że zarażona może zostać cała szachownica.

2. Rozważmy nieskończoną szachownicę o ponumerowanych liczbami całkowitymi wierszach i kolumnach. W kolumnach o numerach niedodatnich na każdym polu stoi pion. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących w wierszu lub kolumnie pionów, a następnie przeskoczeniem jednym z nich przez drugi i zdjęciem drugiego. Ruch wolno wykonać tylko o ile pole, na które skaczemy, jest puste. Udowodnij, że w skończonej liczbie ruchów nie da się doprowadzić żadnego z pionów do piątej kolumny.

3. n graczy uczestniczy w turnieju szachowym, w którym każdy z każdym rozgrywa dokładnie jedną partię. Po turnieju okazało się, że dla każdej czwórki uczestników istnieje wśród niej jeden, który z każdym pozostałym miał inny wynik meczu (wygrana, przegrana, remis). Udowodnij, że $6 \leqslant n \leqslant 9$.

4. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 64\}$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Udowodnić, że istnieją liczby a, b, c (niekoniecznie różne), należące do jednego zbioru, takie, że $a + b = c$.

5. Niech ABC będzie trójkątem nierównobocznym, którego środkiem okręgu wpisanego jest I, a opisanego O. Punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokami BC, AC i AB są odpowiednio punkty D, E i F. Udowodnij, że ortocentrum trójkąta DEF leży na prostej IO.

6. Na bokach trójkąta BC, CA i AB równoramiennego trójkąta ABC, w którym $|AB| = |BC|$, obrano odpowiednio punkty D, E i F tak, by $|\measuredangle BFD| = |\measuredangle CDE| = |\measuredangle BAC|$. Proste BE i CF przecinają cię w punkcie P. Wykaż, że na czworokącie $AEPF$ da się opisać okrąg.

7. Dany jest sześciokąt wypukły, w którym każde dwa przeciwległe boki mają następującą własność: odległość pomiędzy ich środkami jest równa sumie długości tych boków pomnożonej przez $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Udowodnić, że wszystkie kąty tego sześciokąta są równe.

8. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają równość:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x).$$

9. Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$, znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{{a_i}^2 + (2i-1)^2}.$$

10. a) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi podzielność $(n!)^{n+1} | (n^2)!$
10. b) Znajdź wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których zachodzi podzielność $(n!)^{n+2} | (n^2)!$
10. c) Znajdź taką liczbę naturalną $n \geqslant 2$, że zachodzi podzielność $(n!)^{n+3} | (n^2)!$

11. Niech p będzie liczbą pierwszą. Dowieść, że istnieje taka liczba pierwsza q, że dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $n^p - p$ nie jest podzielna przez q.