Stereometria

1. Wielościan wypukły ma w wierzchołków. Oblicz sumę kątów płaskich wszystkich jego ścian.

2. Wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanu $ABCD$ są proste. Wykaż, że rzut A na płaszczyznę BCD jest orotcentrum trójkąta BCD.

3. W ostrosłupie pięciokątnym o podstawie $ABCDE$ i wierzchołku S wszystkie krawędzie boczne są równe, a kąty ABC i AED są przystające. Wykaż, że proste AS i CD są prostopadłe.

4. Wykaż, że pole rzutu prostokątnego sześcianu o krawędzi 1 na płaszczyznę jest równe co najwyżej $\sqrt{3}$.

5. W ostrosłupie pięciokątnym o podstawie $ABCDE$ i wierzchołku S wszystkie krawędzie boczne są równe, a kąty ABC i AED są przystające. Wykaż, że proste AS i CD są prostopadłe.

6. Czy istnieje taki czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami prostokątnymi?

7. Udowodnić, że suma miar wszystkich kątów dwuściennych dowolnego czworościanu jest większa od 2π.

8. Udowodnić, że suma miar sześciu kątów, pod którymi widać krawędzie dowolnego czworościanu z dowolnego jego punktu wewnętrznego jest większa od 3π.

9. Dany jest czworościan $ABCD$ oraz punkty K, L, M i N takie, że $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{CD}$.
Wykaż, że objętość czworościanu $KLMN$ jest dwa razy większa niż czworościanu $ABCD$.

10. W ostrosłupie prawidłowym o wierzchołku S i podstawie $A_1A_2\dots A_n$ każda krawędź boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt $60°$. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ rozstrzygnąć, czy można wybrać takie punkty $B_2, B_3, \dots, B_n$ leżące odpowiednio na krawędziach A_2S, A_3S, $\dots$, A_nS, że $A_1B_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + \dots + B_nA_1 \leqslant A_1S$.