Klasóweczka

grupa pierwszoklasistów

sobota, 27 września 2003

71. Odcinki AB i CD są średnicami okręgu ω, a punkt M należy do tego okręgu. Punkty P i R są rzutami prostokątnymi punktu M na proste AB i CD. Wykazać, że, przy ustalonych średnicach AB i CD, długość odcinka PR nie zależy od wyboru punktu M.

72. $2n$-cyfrową *superliczbą Grabowskiego* (oznaczamy G_n) nazywamy liczbę składającą się w zapisie dziesiętnym z n jedynek, a po nich n dwójek, np. liczby 12, 1122 są *superliczbami Grabowskiego*, ale liczby 11122 i 1212 już nie są. Udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p zachodzi:

$$p \mid G_p - 12.$$

73. Punktem kratowym nazywamy punkt o obu współrzędnych całkowitych. Na płaszczyźnie obrano 5 parami różnych punktów kratowych. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie punkty A i B, że odcinek AB zawiera jeszcze przynajmniej jeden punkt kratowy oprócz A i B.

74. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d zachodzi nierówność:

$$16abcd \leqslant (a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

75. Dany jest trójkąt ABC. Prosta k równoległa do boku AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach X i Y. Proste BX i AY przecinają się w punkcie P. N jest punktem przecięcia prostych CP i AB. Wykazać, że pole trójkąta ANX jest równe polu trójkąta BNY.

Klasóweczka

grupa młodsza

sobota, 27 września 2003

73. Punktem kratowym nazywamy punkt o obu współrzędnych całkowitych. Na płaszczyźnie obrano 5 parami różnych punktów kratowych. Udowodnić, że istnieją wśród nich takie punkty A i B, że odcinek AB zawiera jeszcze przynajmniej jeden punkt kratowy oprócz A i B.

74. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d zachodzi nierówność:

$$16abcd \leqslant (a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

75. Dany jest trójkąt ABC. Prosta k równoległa do boku AB przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach X i Y. Proste BX i AY przecinają się w punkcie P. N jest punktem przecięcia prostych CP i AB. Wykazać, że pole trójkąta ANX jest równe polu trójkąta BNY.

76. Udowodnić, że dla dowolnych liczb całkowitych $1 < m \leqslant n$ zachodzi równość:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k-1}{m-1}(n+1-k) = \binom{n+1}{m+1}.$$

77. Na płaszczyźnie dane są okręgi ω_1, ω_2 i ω_3. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A, okręgi ω_2 i ω_3 w punkcie B, zaś okręgi ω_1 i ω_3 w punkcie C. Proste AB i AC przecinają okrąg ω_3 odpowiednio w punktach D i E (poza punktami B i C). Prosta DC przecina okrąg ω_1 w punktach C i F, prosta BE zaś przecina okrąg ω_2 w punktach B i G. Wykazać, że punkt A, F i G są współliniowe.

Klasóweczka

grupa starsza

sobota, 27 września 2003

77. Na płaszczyźnie dane są okręgi ω_1, ω_2 i ω_3. Okręgi ω_1 i ω_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A, okręgi ω_2 i ω_3 w punkcie B, zaś okręgi ω_1 i ω_3 w punkcie C. Proste AB i AC przecinają okrąg ω_3 odpowiednio w punktach D i E (poza punktami B i C). Prosta DC przecina okrąg ω_1 w punktach C i F, prosta BE zaś przecina okrąg ω_2 w punktach B i G. Wykazać, że punkt A, F i G są współliniowe.

78. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d takich, że $a+b+c \leqslant 2$ i $b+c+d \leqslant 7$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{bc} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leqslant 6.$$

79. Wyznacz wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(f(x) + y) = f(y) - f(x).$$

710. Pięć różnych punktów A, B, C, D i E leży na prostej, przy czym $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$. Punkt F nie leży na tej prostej. Punkt G jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADF, zaś H jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BEF. Dowieść, że proste GH i FC są prostopadłe.

711. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi i niech

$$\begin{gathered}S_0 = 1,\\ S_1 = x_1 + x_2 + ... + x_n,\\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n,\\ \ldots,\\ S_n = x_1x_2...x_n.\end{gathered}$$

Udowodnić, że:

$$\sum_{k=0}^{n} S_k S_{n-k} \geqslant \binom{2n}{n} S_n.$$

712. Na bokach trójkąta ABC obrano sześć punktów, po dwa na każdym boku. Dla każdych dwóch boków cztery wybrane punkty leżące na nich leżą na jednym okręgu. Wykazać, że wszystkie sześć wybranych punktów leży na jednym okręgu.

Klasóweczka

grupa najstarsza

sobota, 27 września 2003

713. Niech $q \mid \frac{p^p-1}{p-1}$ dla pewnych liczb pierwszych nieparzystych p, q. Udowodnić, że $p \mid q-1$.

714. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, będących długościami boków trójkąta, zachodzi nierówność:

$$\sqrt{a}(a+c-b)+\sqrt{b}(a+b-c)+\sqrt{c}(b+c-a) \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}.$$

715. W okręgu ω dana jest cięciwa CE niebędąca średnicą. Punkt D jest środkiem krótszego łuku CE, odcinek KD zaś jest średnicą okręgu ω. Punkty A i B należą odpowiednio do odcinków KE i KC. F jest takim punktem na odcinku AB, że $\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{|BC|}{|AE|}$. Udowodnić, że $|\measuredangle FCE| = |\measuredangle ADE|$.

716. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ i dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ takich, że $a_i > \pi n$ dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, zachodzi nierówność:

$$\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i-1}{a_i}} \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i}-1}{a_i}.$$

717. Onufry i Joasia grają w grę. Na płaszczyźnie są narysowane 2002 wektory. Zaczyna Joasia i gracze na przemian zabierają ze zbioru narysowanych wektorów po jednym wektorze, aż do wyczerpania zapasów. Wygrywa ten, kto na końcu będzie miał dłuższą sumę wybranych wektorów, a w przypadku równej długości ogłaszany jest remis. Rozstrzygnąć, czy niezależnie od początkowego zbioru wektorów Joasia zawsze może nie przegrać z Onufrym.

718 . Niech $n \in \mathbb{Z}^+$. Obliczyć

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k}.$$