Równania funkcyjne

1. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x + y) = f(x) - f(y).$$

2. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

3. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(y)f(x) - xy = f(x) + f(y) - 1.$$

4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ równanie:

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

5. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x + y) = f(f(x)) + y.$$

6. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

7. Znajdź wszystkie funkcje monotoniczne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x) + f(y) = f(x + y).$$

8. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x) + f(\frac{1}{1 - x}) = x.$$

9. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(f(x + y) - 2xy) = x^4 + f(y^2) - 2f(xy).$$

10. Znajdź wszystkie funkcje różnowartościowe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych liczb $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

11. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$xf(y) - yf(x) = xy(y^2 - x^2).$$

12. Znajdź wszystkie funkcje $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy).$$