Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa pierwszoklasistów

środa, 24 września 2003

41. W trójkącie ostrokątnym ABC odcinki AD, BE i CF są wysokościami. Prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punktach A i P, prosta BE w punktach B i Q, zaś prosta CF w punktach C i R. Wyznaczyć możliwe wartości stosunku pola sześciokąta $ARBPCQ$ do pola trójkąta ABC.

42. W trójkącie $A_1A_2A_3$ punkt C_i jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta $A_1A_2A_3$ naprzeciwko wierzchołka A_i dla $i = 1, 2, 3$. Wykazać, że środki odcinków C_1C_2, C_2C_3 i C_3C_1 leżą na okręgu opisanym na trójkącie $A_1A_2A_3$.

43. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość

$$f(2x + y) + f(2y + x) = 5x^2 + 8xy + 5f(y).$$

44. *Liczbą trójkątną* nazywamy liczbę postaci $\frac{k(k+1)}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}^+$. Znaleźć liczby całkowite dodatnie a i b takie, że a jest najmniejsze z możliwych i wśród liczb postaci $an + b$ dla n całkowitego dodatniego nie ma *liczb trójkątnych*.

45. *Elką* nazywamy klocek w kształcie prostąkąta 3×2 z wyciętym klockiem 2×1 tak, by nie powstał kwadrat 2×2. Rozstrzygnąć, dla jakich m i n tablicę $m \times n$ można pokryć *elkami* (*elki* można obracać i odwracać na drugą stronę).

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa młodsza

środa, 24 września 2003

44. *Liczbą trójkątną* nazywamy liczbę postaci $\frac{k(k+1)}{2}$ dla $k \in \mathbb{Z}^+$. Znaleźć liczby całkowite dodatnie a i b takie, że a jest najmniejsze z możliwych i wśród liczb postaci $an + b$ dla n całkowitego dodatniego nie ma *liczb trójkątnych*.

45. *Elką* nazywamy klocek w kształcie prostąkąta 3×2 z wyciętym klockiem 2×1 tak, by nie powstał kwadrat 2×2. Rozstrzygnąć, dla jakich m i n tablicę $m \times n$ można pokryć *elkami* (*elki* można obracać i odwracać na drugą stronę).

46. Dana jest prosta k i punkt H nieleżący na tej prostej. Rozważamy trójkąty ABC takie, że wierzchołki A i B leżą na prostej k oraz punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Wykazać, że okręgi opisane na takich trójkątach ABC mają punkt wspólny.

47. Dany jest czworokąt $ABCD$. Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty ABD i BCD mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

48. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ o współczynnikach całkowitych dodatnich ma n pierwiastków rzeczywistych. Ponadto $a_{n-1} < a_0$ oraz a_0 jest liczbą pierwszą. Wykazać, że jeśli W ma pierwiastek całkowity, to $11 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$.

49. W kole o promieniu 2 obrano 64 różne punkty. Udowodnić, że istnieje kwadrat o boku długości 1 taki, że dwa spośród zaznaczonych punktów leżą w kole opisanym na tym kwadracie, ale nie leżą wewnątrz tego kwadratu.

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa starsza

środa, 24 września 2003

42. W trójkącie $A_1A_2A_3$ punkt C_i jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta $A_1A_2A_3$ naprzeciwko wierzchołka A_i dla $i = 1, 2, 3$. Wykazać, że środki odcinków C_1C_2, C_2C_3 i C_3C_1 leżą na okręgu opisanym na trójkącie $A_1A_2A_3$.

48. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wielomian $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ o współczynnikach całkowitych dodatnich ma n pierwiastków rzeczywistych. Ponadto $a_{n-1} < a_0$ oraz a_0 jest liczbą pierwszą. Wykazać, że jeśli W ma pierwiastek całkowity, to $11 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$.

49. W kole o promieniu 2 obrano 64 różne punkty. Udowodnić, że istnieje kwadrat o boku długości 1 taki, że dwa spośród zaznaczonych punktów leżą w kole opisanym na tym kwadracie, ale nie leżą wewnątrz tego kwadratu.

410. Na płaszczyźnie dane są proste a, b i c. Proste a i b przecinają się w punkcie C, proste a i c w punkcie B, proste b i c zaś w punkcie A. Na prostej a obrano punkt P poza odcinkiem BC. Prosta k przechodzi przez punkt P i przecina proste b i c w odpowiednio punktach Q i R. Proste QB i RC przecinają się w punkcie X, proste AX i a przecinają się w punkcie Y. Udowodnić, że punkt Y nie zależy od wyboru prostej k.

411. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b takie, że $a \perp b$. Dowieść, że w ciągu $x_n = an + b$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ można wybrać nieskończony podciąg liczb parami względnie pierwszych.

412. Pole czworokąta $ABCD$ wynosi 1. Udowodnić, że suma długości boków i przekątnych jest niemniejsza niż $4 + 2\sqrt{2}$.

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa najstarsza

środa, 24 września 2003

411. Dane są liczby całkowite dodatnie a, b takie, że $a \perp b$. Dowieść, że w ciągu $x_n = an+b$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ można wybrać nieskończony podciąg liczb parami względnie pierwszych.

412. Pole czworokąta $ABCD$ wynosi 1. Udowodnić, że suma długości boków i przekątnych jest niemniejsza niż $4 + 2\sqrt{2}$.

413. Punkty A, B i C leżą na prostej k w tej właśnie kolejności. Okrąg o środku w punkcie O_1 przechodzi przez punkty A i B, zaś okrąg o środku O_2 przechodzi przez punkty B i C, przy czym punkty O_1 i O_2 leżą po tej samej stronie prostej k. Okręgi te przecinają się w punkcie P, zaś okręgi opisane na trójkątach O_1AB i O_2BC przecinają się w punkcie Q. Wykazać, że jeśli punkty P, Q i B są współliniowe, to okręgi opisane na trójkątach ABO_1 i BCO_2 są przystające.

414. Udowodnić, że dla liczby pierwszej nieparzystej p oraz liczby naturalnej n takiej, że $p \nmid n$, zachodzi następująca równość:

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{kn}{p}\right) = 0,$$

gdzie $\left(\frac{n}{p}\right)$ jest symbolem Legendre'a, równym 1 gdy n jest resztą kwadratową $(mod\ p)$, zaś -1, gdy nie jest.

415. Wewnątrz trójkąta ABC znajduje się punkt P.

(a) Wykazać, że odbicia symetryczne prostych AP, BP i CP wzgledem odpowiednio dwusiecznych wewnętrznych kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie Q.

(b) Wykazać, że rzuty prostokątne punktów P i Q na boki trójkąta ABC leżą wszystkie na jednym okręgu.

416. Rozstrzygnąć, czy istnieje rozwiązanie w liczbach rzeczywistych a, b, c, d układu równań:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2 = 11 \\ a^3+b^3+c^3+d^3 = 13 \\ ab+bc+ca+da+db+dc = -5 \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+d^2a^2+d^2b^2+d^2c^2 = 43 \end{cases}$$