Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 21 września 2003

11. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$ i liczba rzeczywista a. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ układ równań:

$$\begin{cases} x_1^2 + ax_1 + (\frac{a-1}{2})^2 = x_2 \\ x_2^2 + ax_2 + (\frac{a-1}{2})^2 = x_3 \\ \ldots \\ x_n^2 + ax_n + (\frac{a-1}{2})^2 = x_1. \end{cases}$$

12. *Liczbą Grabowskiego* nazywamy liczbę całkowitą dodatnią, która w zapisie dziesiętnym składa się z samych jedynek. Udowodnij, że jeśli pewna *liczba Grabowskiego* jest pierwsza, to liczba jej cyfr również jest pierwsza.

13. Na polach szachownicy $n \times n$ rozmieszczono n^2 różnych liczb całkowitych, po jednej na każdym polu. W każdej kolumnie pole z największą liczbą pomalowano na czerwono. Zbiór n pól szachownicy nazwiemy *dopuszczalnym*, jeżeli żadne dwa z tych pól nie znajdują się w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie. Spośród wszystkich zbiorów dopuszczalnych wybrano zbiór, dla którego suma liczb umieszczonych na jego polach jest największa. Wykazać, że w tak wybranym zbiorze jest czerwone pole.

14. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość $f(f(n)) = 2n$.

15. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ przekątne BE i BD przecinają przekątną AC odpowiednio w punktach K i M, przy czym $|AE| = |EK| = |KB|$ i $|AK| = |MC|$. Wykazać, że $|EM| = |BC|$.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 21 września 2003

15. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ przekątne BE i BD przecinają przekątną AC odpowiednio w punktach K i M, przy czym $|AE| = |EK| = |KB|$ i $|AK| = |MC|$. Wykazać, że $|EM| = |BC|$.

16. Ciąg (a_k) jest zdefiniowany następująco: dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a_k = 729k + 1$. Wykazać, że w tym ciągu istnieje nieskończenie wiele wyrazów będących potęgami liczby 10.

17. Do pokoju, gdzie przy okrągłym stole jest n miejsc, wchodzi kolejno n osób. Pierwsza osoba siada na dowolnym miejscu. Kolejna siada na pierwszym krześle po lewej od pierwszej osoby. Osoba o numerze i siada na $i-1$-szym krześle po lewej od osoby o numerze $i-1$. Wyznacz wszystkie takie n, dla których n osób bezkonfliktowo usiądzie przy stole.

18. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ i dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ zachodzi nierówność:

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

19. Wyznacz wszystkie takie n całkowite dodatnie, dla których każdemu wierzchołkowi n-kąta foremnego można przyporządkować różną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tak, by dla każdych trzech wierzchołków A, B, C, dla których $|AB| = |AC|$, liczba przy wierzchołku A była albo mniejsza, albo większa od jednocześnie obu liczb przy wierzchołkach B i C.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa najstarsza

niedziela, 21 września 2003

17. Do pokoju, gdzie przy okrągłym stole jest n miejsc, wchodzi kolejno n osób. Pierwsza osoba siada na dowolnym miejscu. Kolejna siada na pierwszym krześle po lewej od pierwszej osoby. Osoba o numerze i siada na $i-1$-szym krześle po lewej od osoby o numerze $i-1$. Wyznacz wszystkie takie n, dla których n osób bezkonfliktowo usiądzie przy stole.

18. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ i dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ zachodzi nierówność:

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_2 - x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

19. Wyznacz wszystkie takie n całkowite dodatnie, dla których każdemu wierzchołkowi n-kąta foremnego można przyporządkować różną liczbę ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ tak, by dla każdych trzech wierzchołków A, B, C, dla których $|AB| = |AC|$, liczba przy wierzchołku A była albo mniejsza, albo większa od jednocześnie obu liczb przy wierzchołkach B i C.

110. Niech O i O_1 będą środkami odpowiednio okręgu wpisanego w trójkąt ABC i okręgu dopisanego do trójkąta ABC naprzeciwko wierzchołka A. Udowodnij, że jeśli okrąg opisany na trójkącie ABC jest styczny do symetralnej odcinka OO_1, to trójkąt ABC jest równoramienny.

111. Znajdź wszyskie liczby całkowite dodatnie n takie, że dla każdych liczb całkowitych dodatnich a, b takich, że $NWD(a, b) = 1$ oraz $a|n$ i $b|n$, zachodzi $a + b - 1|n$.