Mecz matematyczny

grupa młodsza

piatek, 26 września 2003

61. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ o boku długości 1. Punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AA' i CC'. Punkt M jest takim punktem na półprostej BB', że $2|B'M| = |BB'|$. Punkty P i Q są przecięciami płaszczyzny KLM z prostymi AD i CD. Obliczyć pole pięciokąta $KMLQP$.

62. Niech $A_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$. Udowodnić, że dla $n > 4$ złożonych, A_n również jest liczbą złożoną.

63. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c takich, że $a + b + c = 1$ zachodzi

$$6(ab + bc + ca) + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \leqslant 2.$$

64. Wyznaczyć wszystkie takie pary rozłącznych niepustych zbiorów A i B, że ich suma (mnogościowa) jest zbiorem liczb całkowitych nieujemnych oraz zachodzą jednocześnie następujące warunki:

(i) suma dwóch liczb należących do jednego zbioru należy zawsze do A;

(ii) suma dwóch liczb należących do różnych zbiorów należy zawsze do B.

65. Dane jest m monet, z których wszystkie ważą tyle samo oprócz jednej, której masa jest inna. Wyznaczyć największe m takie, że podróbkę da się znaleźć w co najwyżej n ważeniach na wadze szalkowej bez odważników, jeśli

(a) wiadomo, czy moneta fałszywa jest cięższa czy lżejsza od pozostałych.

(b) nie wiadomo, czy moneta fałszywa jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych.

66. Wykazać, że w rozwinięciu $\sqrt{2}$ w systemie dziesiętnym na miejscach od miliardowego do trzymiliardowego po przecinku włącznie istnieje pewna niezerowa cyfra.

67. W okręgu o środku O cięciwy AC i BD, z których żadna nie jest średnicą, są prostopadłe i przecinają się w punkcie M. Punkty K i N są środkami odpowiednio odcinków AD i BC. Wykaż, że czworokąt $KMNO$ jest równoległobokiem.

68. Wykazać, że każdą liczbę całkowitą $n > 3$ daje się przedstawić jako sumę różnych wyrazów ciągu Fibonacciego tak, by w tej sumie nie występowały dwa kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego.

69. W równoległoboku $ABCD$ punkt M należy do przekątnej BD, punkt K do boku CD, a punkt N do boku BC, przy czym $KM \| BC$ i $MN \| AB$. Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AN i AK z przekątną BD. Wykazać, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów DKF i ENB.

610. Znaleźć rozwiązania w liczbach naturalnych m, n równania:

$$m^2 n + 1 = m^2 + 2mn + 2m + n.$$

611. Niech $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2000})$ będzie permutacją zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$. Udowodnić, że istnieją różne liczby $k, l \in \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ takie, że

$$2000 \mid (a_k + k) - (a_l + l).$$

Mecz matematyczny

grupa starsza

piatek, 26 września 2003

69. W równoległoboku $ABCD$ punkt M należy do przekątnej BD, punkt K do boku CD, a punkt N do boku BC, przy czym $KM \| BC$ i $MN \| AB$. Punkty E i F to odpowiednio punkty przecięcia prostych AN i AK z przekątną BD. Wykazać, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów DKF i ENB.

610. Znaleźć rozwiązania w liczbach naturalnych m, n układu równań:

$$m^2 n + 1 = m^2 + 2mn + 2m + n.$$

611. Niech $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2000})$ będzie permutacją zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$. Udowodnić, że istnieją różne liczby $k, l \in \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$ takie, że

$$2000 \mid (a_k + k) - (a_l + l).$$

612. Wykazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ zachodzi równość:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + 2\binom{n}{1}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} + 2^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} + \ldots + 2^{n-1}\binom{n}{n-1}\binom{1}{\lfloor\frac{1}{2}\rfloor} + 2^n = \binom{2n+1}{n}.$$

613. Udowodnić, że każdy trójkąt pitagorejski o przyprostokątnych, których długości boków są kolejnymi liczbami naturalnymi, ma boki postaci $f^k(3, 4, 5)$, gdzie f jest funkcją zdefiniowaną nastepująco: $f(x, x+1, z) = (3x + 2z + 1, 3x + 2z + 2, 4x + 3z + 2)$, zaś f^k, gdzie $k \in \mathbb{N}$, oznacza k-krotne złożenie f.

614. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z takich, że $x + y + z = 3$, zachodzi nierówność:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant xy + yz + zx.$$

615. Niech punkt O będzie środkiem okręgu ω. Przystające cięciwy AB i CD okręgu ω przecinają się w punkcie L i $|AL| > |LB|$ oraz $|CL| < |LD|$. Niech M i N będą punktami odpowienio na odcinkach AL i DL takimi, że $|\measuredangle ALC| = 2|\measuredangle MON|$. Udowodnić, że cięciwa okręgu ω przechodząca przez punkty M i N jest przystająca do cięciw AB i CD.

616. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dla których zachodzi $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+x_n} \leqslant 1.$$

617. Znaleźć wszystkie rozwiązania w liczbach całkowitych (x, y, z) układu równań:

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

618. W równoległościanie $ABCDA'B'C'D'$ na krawędziach AB, BC, CD i DA obrano odpowiednio punkty K, L, M, N. Wykazać, że środki sfer opisanych na czworościanach $A'ANK$, $B'BKL$, $C'CLM$, $D'DMN$ tworzą równoległobok.

619. Pewien duży trójkąt o wierzchołkach V_1, V_2, V_3 striangulowano, tzn. podzielono na skończenie wiele trójkątów, z których sąsiednie przylegają do siebie całym bokiem lub dotykają wierzchołkami.

Wierzchołkom triangulacji przypisujemy kolory ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ w taki sposób, że V_i dostaje kolor i. Do kolorowania wierzchołków na boku V_jV_k $(j \neq k)$ używamy wyłącznie kolorów j oraz k, zaś wierzchołki wewnątrz dużego trójkąta kolorujemy dowolnie.

Udowodnić, że w triangulacji istnieje mały trójkolorowy trójkąt.