

Dziesięć niekoniecznie nieprostych zadań nie tylko z kolorkami

wtorek, 23 września 2003

1. Dane jest 66 punktów trójkami niewspółliniowych na płaszczyźnie. Każde dwa punkty łączymy odcinkiem w jednym z czterech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt o bokach jednego koloru.

2. Dane jest 9 punktów trójkami niewspółliniowych na płaszczyźnie. Każde dwa punkty łączymy odcinkiem w jednym z dwóch kolorów: czarny lub biały. Udowodnij, że istnieje czworokąt o bokach i przekątnych białych lub trójkąt o bokach czarnych.

3. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z 3 kolorów. Udowodnij, że istnieją trzy różne punkty jednego koloru na tym okręgu tworzące trójkąt równoramienny.

4. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno lub biało. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach tego samego koloru.

5. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno, biało lub na kolor kawa z mlekiem. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru w odległości 1.

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno lub biało. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoboczny o boku 1 lub $\sqrt{3}$ o wierzchołkach tego samego koloru.

7. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na czarno lub biało. Udowodnij, że istnieją cztery punkty A , B , C i D jednego koloru takie, że punkt D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

8. W przestrzeni trójwymiarowej pomalowano 2000 punktów kratowych na czerwono i inne 2000 na niebiesko tak, że żadne dwa takie odcinki, że jeden koniec odcinka jest punktem czerwonym, a drugi niebieskim, nie mają punktów wspólnych poza ewentualnymi wierzchołkami. Udowodnij, że dla każdego prostopadłościanu o wierzchołach u punktach kartowych i krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych, zawierającego wszystkie pomalowane punkty, objętość tego prostopadłościanu jest co najmniej 500000.

9. Na płaszczyźnie pomalowano n punktów na niebiesko oraz okrąg o promieniu 1 na czerwono. Udowodnij, że istnieje czerwony punkt o sumie odległości od niebieskich punktów nie mniejszej niż n .

10. Na płaszczyźnie dana jest figura F , która jest wypukła i środkowosymetryczna względem jednego z punktów kratowych. Wykaż, że jeśli ona nie zawiera żadnego więcej punktu kratowego, to ma pole nie większe niż 4.