Insze bajery

1. W głosowaniu oddano p głosów na Samoobronę i q głosów na LPR ($p > q$). Policz prawdopodobieństwo, że cały czas podczas trwania wyborów:
a) wygrywała Samoobrona
b) nie przegrywała Samoobrona.

2. Na ile sposobów można ustawić w dwuszereg 2n-osobową drużynę harcerską (wszystkie osoby są parami różnego wzrostu), aby w każdym szeregu harcerze stali od najwyższego do najniższego oraz aby w każdej parze wyższy stał za niższym?

3. Wyznacz największą możliwą wartość wyrażenia

$$x\sqrt{(1-y^2)} + y\sqrt{(1-x^2)}$$

dla $x, y \in [-1, 1]$.

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a i b, $a > b$, zachodzi nierówność

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} \geqslant a.$$

5. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $a, b, c \in [-1, 1]$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} a = 3c - 4c^3 \\ b = 3a - 4a^3 \\ c = 3b - 4b^3. \end{cases}$$

6. Dana jest liczba całkowita $n \geqslant 2$. Wyznaczyć liczbę rozwiązań $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ układu równań:

$$\begin{cases} x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ x_3 + x_2^2 = 4x_2 \\ x_4 + x_3^2 = 4x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \\ x_1 + x_n^2 = 4x_n. \end{cases}$$

w liczbach rzeczywistych nieujemnych.

7. Wykaż, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

8. Dla dowolnych liczb $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$, znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{{a_i}^2 + (2i-1)^2}.$$