Pierwsze zawody drużynowe

grupa młodsza

wtorek, 23 września 2003

31. W czworościanie $ABCD$ suma miar kątów płaskich przy każdym wierzchołku jest równa. Udowodnić, że okręgi opisane na każdej ze ścian są przystające.

32. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite $x, y > n$ takie, że $x^x \mid y^y$, lecz $x \nmid y$.

33. We wnętrzu trójkąta równobocznego ABC obrano punkt M. Wykazać, że z odcinków AM, BM i CM można zbudować trójkąt, którego pole jest nie większe od trzeciej części pola trójkąta ABC.

34. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ spełniające dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$ równość

$$f(x+y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1.$$

35. Przy okrągłym stole siedzi parzysta liczba osób. W pewnym momencie wszyscy wyszli podpisać regulamin, po czym ponownie zasiedli do stołu, niekoniecznie w tej samej konfiguracji. Udowodnić, że istnieją dwie osoby, których dzieli ta sama liczba osób, co przed podpisaniem regulaminu.

36. Onufry położyl na szachownicy 29×29 dziewięćdziesiąt dziewięć kwadracików o wymiarach 2×2 tak, by każdy przykrywał 4 całe kwadraty jednostkowe szachownicy. Udowodnić, że mimo starań Onufrego Joasia będzie w stanie położyć na szachownicy jeszcze jeden kwadracik 2×2 tak, by nie zachodził na kwadraciki Onufrego.

37. Ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest zdefiniowany następująco:

$$a_{4n-1} = 1,\ a_{4n-3} = 0 \text{ i } a_{2n} = a_n \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykazać, że ciąg (a_n) nie jest okresowy.

38. Na płaszczyźnie dane są punkty A, I i O. Skonstruować trójkąt ABC taki, że A jest jego wierzchołkiem, I środkiem okręgu wpisanego, a O opisanego.

39. W zawodach startuje n graczy. Każda para gra mecz, którego wynikiem może być tylko zwycięstwo lub przegrana. Gracz o numerze i dla $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ wygrał a_i meczów i przegrał b_i meczów. Wykazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

310. Wykazać, że nie istnieją liczba pierwsza $p > 5$ i liczba naturalna $m > 1$ takie, że $(p-1)! + 1 = p^m$.

311. Ciąg $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest zdefiniowany następująco:

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \text{ i } a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1} + a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wykazać, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}^+$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $k|a_n$.

Pierwsze zawody drużynowe

grupa starsza

wtorek, 23 września 2003

311. Ciąg $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest zdefiniowany następująco:

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \text{ i } a_{n+3} = a_{n+2}a_{n+1} + a_n \text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Wykazać, że dla każdego $k \in \mathbb{Z}^+$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $k|a_n$.

312. Wskazać taki sposób rozmieszczenia przy okrągłym stole n dziewcząt i n chłopców, aby liczba $d_n - c_n$ była największa, gdzie d_n jest liczbą dziewcząt siedzących między dwoma chłopcami, zaś c_n - liczbą chłopców siedzących miedzy dwoma dziewczętami.

313. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ oraz: $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n > 0$. Wyznaczyć liczbę liczb całkowitych n spełniających warunki $0 < n \leqslant 1988$ oraz $f(n) = n$.

314. Niech P będzie punktem we wnętrzu czworościanu foremnego $ABCD$ o boku 1. Udowodnić, że $\sqrt{6} \leqslant |PA| + |PB| + |PC| + |PD| \leqslant 3$.

315. Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których zachodzi $2 \nmid n$ i $n \mid 3^n + 1$

316. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej t istnieje ciąg arytmetyczny o długości t, którego wyrazy są potęgami liczb całkowitych o wykładnikach większych od 1.

317. Dane są liczby całkowite dodatnie k i n. Na szachownicy $n \times n$ umieszczono kn kamieni tak, by w każdym rzędzie i w każdej kolumnie było dokładnie k kamieni (może wiele kamieni leżeć na jednym polu). *Dopuszczalnym* nazywamy układ n pól szachownicy, w którym żadne dwa pola nie leżą w jednym rzędzie ani w jednej kolumnie. *Ruch* polega na wybraniu układu *dopuszczalnego*, w którym na każdym polu leży przynajmniej 1 kamień, i zdjęcie z każdego pola wybranego układu po 1 kamieniu. Udowodnić, że takimi *ruchami* da się zdjąć wszystkie kamienie z szachownicy.

318. Proste k_1, k_2 i k_3 przecinają się w punkcie S. Okręgi ω_i i ω_{i+3} przechodzą przez punkt S, leżą po przeciwnych stronach i są styczne do prostej k_i, dla $i = 1, 2, 3$. Okręgi ω_i i ω_{i+2} przecinają się w punkcie B_i dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (przyjmujemy $\omega_1 = \omega_7$ i $\omega_2 = \omega_8$). Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach SB_1B_4, SB_2B_5 i SB_3B_6 mają jeszcze jeden punkt wspólny poza S.

319. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą różnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Udowodnić, że zachodzi nierówność:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{2n+1}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

320. Okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 i ω_6 są styczne wewnętrznie do okręgu ω w odpowiednio punktach A, B, C, D, E i F. W dodatku dla każdego $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ okręgi ω_i i ω_{i+1} są styczne zewnętrznie (przyjmujemy $\omega_1 = \omega_7$). Wykazać, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.