Drugie zawody indywidualne

grupa pierwszoklasistów

poniedziałek, 22 września 2003

21. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniające układ równań:
$$\begin{cases} abc + ab + bc + ca + a + b + c = 1 \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d = 9 \\ cda + cd + da + ac + d + c + a = 9 \\ dab + da + ab + bd + d + a + b = 9 \end{cases}$$

22. W trakcie turnieju tenisowego, w którym uczestniczyło n graczy, każda para rozegrała 1 mecz i nie odnotowano remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A, który każdego innego gracza B pokonał bezpośrednio lub pośrednio, to znaczy gracz A wygrał z B lub gracz A pokonał pewnego zawodnika C, który wygrał z graczem B.

23. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω, a punkty C i D są dowolnymi punktami na okręgu ω. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, a proste AD i BC w punkcie Q. Udowodnić, że $AB \perp PQ$.

24. n krasnoludków o wzrostach $1, 2, 3, \ldots, n$ stoi na okręgu. Jaka jest

(a) najmniejsza

(b) największa

możliwa suma wartości bezwzględnych różnic między wysokościami sąsiednich krasnoludków na okręgu?

25. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $|12^k - 5^l|$ dla $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

Drugie zawody indywidualne

grupa młodsza

poniedziałek, 22 września 2003

23. Odcinek AB jest średnicą okręgu ω, a punkty C i D śa dowolnymi punktami na okręgu ω. Proste AC i BD przecinają się w punkcie P, a proste AD i BC w punkcie Q. Udowodnić, że $AB \perp PQ$.

24. n krasnoludków o wzrostach $1, 2, 3, \ldots, n$ stoi na okręgu. Jaka jest

(a) najmniejsza

(b) największa

możliwa suma wartości bezwzględnych różnic między wysokościami sąsiednich krasnoludków na okręgu?

25. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość wyrażenia $|12^k - 5^l|$ dla $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

26. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geqslant 0.$$

27. Udowodnić, że jeśli $p^m | \binom{n}{k}$ dla pewnych liczb naturalnych n, k, m i liczby pierwszej p, to $p^m \leqslant n$.

Drugie zawody indywidualne

grupa starsza

poniedziałek, 22 września 2003

27. Udowodnić, że jeśli $p^m | \binom{n}{k}$ dla pewnych liczb naturalnych n, k, m i liczby pierwszej p, to $p^m \leqslant n$.

28. Na boku AB trójkąta ABC obrano punkty P i Q tak, by punkt P leżał na odcinku AQ i by $|\measuredangle ACP| = |\measuredangle PCQ| = |\measuredangle QCB|$. Niech AD będzie dwusieczną wewnętrzną trójkąta ABC. Prosta AD przecina proste CP i CQ odpowiednio w punktach M i N. Wykazać, że jeśli $|PN| = |CD|$ i $3|\measuredangle BAC| = 2|\measuredangle BCA|$, to trójkąty CQD i QNB mają równe pola.

29. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby n. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że $n = (d(n))^2$.

210. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geqslant 1.$$

211. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, w którym krawędziami są odcinki AE i BF. Obliczyć kąt dwuścienny między płaszczyznami BHC i BHG.

Drugie zawody indywidualne

grupa najstarsza

poniedziałek, 22 września 2003

29. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dzielników liczby n. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n takie, że $n = (d(n))^2$.

210. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \geqslant 1.$$

211. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, w którym krawędziami są odcinki AE i BF. Obliczyć kąt dwuścienny między płaszczyznami BHC i BHG.

212. Niech S będzie zbiorem liczb wymiernych postaci $\frac{1}{mn}$ dla liczb naturalnych $1 \leqslant n, m \leqslant 2003$. Udowodnić, że suma liczb ze zbioru S jest niecałkowita.

213. Odcinki AD, BE i CF są wysokościami trójkąta nierównobocznego ostrokątnego ABC. Niech l będzie prostą równoległą do odcinka EF przechodzącą przez punkt D. Punkty P, Q, R są przecięciami odpowiednio prostych BC i EF, l i AC oraz l i AB. Wykazać, że okrąg opisany na trójkącie PQR przechodzi przez środek odcinka BC.